

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

TESE DE DOUTORADO

**Soluções estáticas esfericamente
simétricas da teoria geométrico-escalar
da gravitação**

Candidata:

Josephine NOGUEIRA RUA

Orientador:

Dr. Mario NOVELLO

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro
de Pesquisas Físicas como requisito parcial para obtenção do Grau Doutor em
Ciências Físicas*

08 de Outubro de 2015

Tese defendida em 8 de junho de 2015 no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Brasil.

Banca:	Dr. Mario NOVELLO	CBPF
	Dr. Sérgio Eduardo DE CARVALHO EYER JORÁS	UFRJ
	Dr. Carlos Augusto ROMERO FILHO	UFPB
	Dr. José MARTINS SALIM	CBPF
	Dr. José ABDALLA HELAYEL NETO	CBPF

Ano 4: "Para obter o completo valor da alegria você deve ter alguém com quem partilhá-la."

M. Twain

Ano 3: "Dureza e resistência são companheiros da morte. Maleabilidade e fraqueza são expressões da renovação do ser. Porque o que endureceu nunca irá ganhar."

A. Tarkovsky

Ano 2: "Mas num país com o intestino à mostra, como o Brasil, o intelectual tem obrigação de tomar posição."

D. Ribeiro

*Ano 1: "Este livro é como um livro qualquer.
Mas eu ficaria contente se fosse lido apenas por pessoas de alma já formada."*

C. Lispector

Resumo

Soluções estáticas esfericamente simétricas da teoria geométrico-escalar da gravitação

por Josephine NOGUEIRA RUA

O objetivo do presente trabalho é caracterizar as soluções estáticas esfericamente simétricas da teoria geométrico-escalar da gravitação (GSG) com foco no estudo das soluções do vácuo e soluções internas que possam ser usadas na descrição de estrelas, no que tange estruturas esféricas no vácuo. Dessa forma visamos contribuir com o processo de teste da GSG com relação a resultados conhecidos e bem sucedidos da relatividade geral (RG), bem como suas soluções limites.

A GSG é uma nova teoria da gravitação, desenvolvida neste Centro, que descreve o campo gravitacional em função de um campo escalar Φ agindo sobre o espaço-tempo representado pela geometria Riemanniana; apresenta equação dinâmica não-linear; segue o princípio de covariância, indo além do domínio da relatividade especial; e as partículas testes percorrem trajetórias geodésicas. Ao contrário das teorias escalares clássicas da gravitação, como as de Norström e Einstein-Grossmann, a GSG é totalmente consistente e permite descrever fenômenos gravitacionais. Até o presente momento a teoria está de acordo com as observações das órbitas planetárias e com o desvio geodésico da luz, além de apresentar uma formulação para a energia gravitacional.

Apresentamos neste texto resultados referentes à validade do teorema de Birkhoff, à estabilidade das órbitas de partículas não massivas na métrica de Schwarzschild, às estrelas Newtonianas e às estrelas incompressíveis. No estudo das soluções do vácuo demonstramos a unicidade da solução de Schwarzschild e, portanto, a validade do teorema de Birkhoff na GSG. O estudo de estabilidade dessas soluções, através de métodos perturbativos lineares, mostrou que a GSG apresenta duas superfícies de aprisionamento: uma correspondente ao raio de Schwarzschild (como na RG) e a outra coincidente com a superfície de estabilidade instável da RG. A superfície de equilíbrio estável é a mesma para a GSG e RG. Ao tentar caracterizar o análogo ao limite de Schwarzschild e, por ventura, obter mais informações sobre as superfícies de aprisionamento, acabamos por

demonstrar que as soluções da GSG para fluidos incompressíveis sempre apresentam pressão isotrópica negativa. É apresentada, também, uma formulação para estrelas Newtonianas e um método geral de obtenção de soluções analíticas.

Ainda descrevemos um modelo estelar para a GSG com uma fonte gravitacional modelada em duas camadas internas: uma métrica constante envolvida por um espaço-tempo não-vazio, preenchido por um fluido em estado inerte, cuja geometria é descrita pela métrica de Schwarzschild. Externa à fonte, encontramos o espaço vazio, também descrito pela métrica de Schwarzschild. Quando restringimos as fontes da gravitação a fluidos perfeitos usuais, como poeira, radiação, matéria dura e constante cosmológica, as condições de contorno do problema impõem que o fluido em estado inerte seja o próprio vácuo e que a estrela seja compacta, com raio igual a $1,6 r_H$, e sem pressão.

No apêndice C, apresentamos um trabalho não integrado ao corpo principal da tese, mas também produzido durante o período de doutorado da candidata. Nele tratamos de uma nova formulação das equações de Einstein a partir das transformações conformes de Berkestein e apresentamos um novo método para obter soluções de gravitação mimética.

palavras chaves: gravitação; modelos alternativos; Schwarzschild; estrelas Newtonianas

Abstract

Static spherically symmetric solutions of geometric scalar theory of gravity

by Josephine NOGUEIRA RUA

The aim of the present work is to characterize static spherically symmetric solutions of geometrical scalar theory of gravity (GSG) focusing in vacuum solutions and intern solutions, which could be used to describe stars, regarding spherical structures on empty space. Thereby, we intent to contribute to the testing process of GSG in relation to known and successful results of general relativity (GR) and its limits solutions.

The GSG is a new theory of gravity, which was developed in this Center, that describes the gravitational field as a function of scalar field Φ acting on the space-time represented by Riemannian geometry; presents non-linear dynamical equation; follows the principle of covariance, going beyond the domain of special relativity; and test particles run through geodesic trajectories. Unlike classical scalar theories of gravity, such as Nordström's and Einstein-Grossmann's theories, GSG is fully consistent and allows the description of gravitational phenomena. Up to now the theory agrees with observation of planetary orbits and geodesic deviation of light. In addition it presents a formulation for the gravitational energy.

In this text, it is shown results concerning the validity of Birkhoff's theorem, the stability of orbits for massless particles in the Schwarzschild metric, the Newtonian stars and incompressible stars. In the study of vacuum solutions we demonstrated the uniqueness of the Schwarzschild solution and, therefore, the validity of Birkhoff's theorem on GSG. The stability study of these solutions, through linear perturbative methods, showed that GSG has two trapping surfaces: one corresponding to the Schwarzschild radius (as in RG) and other coinciding with the surface of unstable stability of GR. The stable equilibrium surface is the same for GSG and GR. On the attempt to determine the analogous to Schwarzschild limit and, perchance, to obtain more information about the trapping surfaces, it was shown that the solutions for incompressible fluids always have negative isotropic pressure on GSG. A formulation for Newtonian stars and a general method of obtaining analytical solutions is also presented.

We also describe a stellar model for GSG with a gravitational source modeled for two fluids: a constant metric surrounded by a non-empty space-time, filled with a fluid in an inert state, whose geometry is described by the Schwarzschild metric. The exterior is empty and also described by Schwarzschild metric. When we restrict the sources of gravitation to usual perfect fluids such as dust, radiation, cosmological constant and hard matter, the boundary conditions require that the fluid in an inert state is the vacuum itself and that the star is pressureless and compact, with a radius equal to 1,6 the Schwarzschild radius.

In Appendix C, we present a work which doesn't concern the main body of the thesis, but it was also produced during the candidate's PhD. We introduce a new formulation of Einstein's equations from Berkestein's transformations and we show a new method to obtain mimetic gravity solutions.

keywords: gravitation; alternative models; Schwarzschild; Newtonian stars

Agradecimentos

À minha família: Nádia Nogueira, Edith Nogueira, Jonathan Janik, Ramon Noguchi, Flávia Ostapiv e Coral Ostapiv-Noguchi.

Aos meus padrinhos, Sidney Xavier e Sônia Bezerra.

Em especial a Nathalie Deruelle e Eduardo Bittencourt, sem os quais essa tese não teria sido possível.

À Tuíla Barbosa, por ter me resgatado.

Minha eterna gratidão ao meus amigos: Lívia Cristina Santos, Beatriz Siffert, Ceres França, Rafael Aranha, Nathalia Panesi e Rafael Perez.

A Mario Novello.

Aos amigos que contribuíram profundamente na minha formação pessoal e acadêmica, em especial: Benedicto Rodrigues, Nagib Chamon, Grasielle Santos, Mariana Penna-Lima Vitenti, Paola Imazio, Patrick Peter, Emille Ishida, Jamille Feitosa, Anna Bremerkamp, Regina Mano, Nádia Rego, Paulo Rogério Sily, Glaucia Pessoa, Monica Bahiana, Evelyne Authier, Laurence Levasseur, Valentin Assassi, Maria Borba, Rodrigo Neumann.

À notabilíssima *patota feliz de futuras mechas coloridas* a quem eu desejo uma trajetória de muito sucesso: Ana Bárbara Calvalcante, Anna Paula Bacalhau, Arthur Scardua, Cinthya Blois, Claudia Buss, Maria Elidaiana Pereira e Vanessa Pacheco.

A todos os pesquisadores, estudantes e colaboradores do *Instituto de Comologia Relatividade e Astrofísica*, em especial: Martín Makler e Elisete Anjos.

À comunidade do CBPF.

A CAPES pelo financiamento do Programa de Pós-graduação do CBPF.

Conteúdo

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	vii
Conteúdo	vii
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Teoria geométrico-escalar da gravitação	8
2.1 Ponto de partida	10
2.2 O limite Newtoniano	11
2.3 Solução estática esfericamente simétrica	12
2.4 Equação dinâmica	15
2.5 Campo electromagnético	16
2.6 Panorama	17
3 Soluções estáticas esfericamente simétricas da teoria geométrico-escalar da gravitação	19
3.1 Teoria geométrico-escalar da gravitação: glossário de equações	19
3.1.1 Métrica esfericamente simétrica da GSG	20
3.2 Soluções do vácuo	22
3.2.1 Da validade do teorema de Birkhoff na GSG	22
3.2.2 Estabilidade da solução do vazio	24
3.3 Estrelas Newtonianas	31
3.4 Equações análogas às equações Tolman-Oppenheimer-Volkoff	33
3.4.1 Soluções analíticas para TOV-GSG	35
3.4.1.1 Exemplo	36
3.5 Condições de contorno	38
3.6 Soluções com densidade de energia constante	39

4 Estrela na teoria geométrico-escalar da gravitação	43
4.1 Solução de Schwarzschild no espaço-tempo não vazio	43
4.2 Métrica constante	44
4.2.1 Considerações sobre a dinâmica da métrica constante	45
4.3 Um modelo estelar	47
4.4 Comentários	49
5 Conclusões	51
A Trajetórias geodésicas na teoria da relatividade geral e na teoria geométrico-escalar da gravitação	58
B Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff na teoria da relatividade geral	60
C Gravitação Mimética	63
C.1 Gravitação mimética: teorias escalares-tensoriais	63
C.2 Equações de movimento	65
C.3 O caso genérico: relatividade geral disfarçada	67
C.4 Gravitação mimética	67
C.5 Soluções estáticas esfericamente simétricas no vácuo	69
Bibliografia	70

Lista de Figuras

3.1	Potencial efetivo da órbita de uma partícula massiva na GSG.	29
3.2	Potencial efetivo da órbita de uma partícula massiva na GSG, caso $L < L_{lim}$	30
3.3	Potencial efetivo da órbita de uma partícula massiva na GSG, caso $L > L_{lim}$	30
3.4	Diagrama Hertzsprung-Russell	31
3.5	Densidade de energia e pressão isotrópica para σ_+	37
3.6	Densidade de energia e pressão isotrópica para σ_-	38
4.1	Densidade de energia e pressão isotrópica para um fluido em estado inerte preenchendo espaço-tempo descrito pela métrica de Schwarzschild	44
4.2	Parâmetro Σ da equação (4.3) como função do número adimensional λ da equação de estado $p = \lambda\rho$	45
4.3	Modelo estelar na GSG.	48

Lista de Tabelas

1.1	Comparação entre algumas teorias da gravitação	7
-----	--	---

Capítulo 1

Introdução

It is a dangerous habit of the human mind to generalize and to extrapolate without noticing is doing so.

Hermann Bondi

A teoria da relatividade geral (RG) é inequivocamente um dos pilares fundamentais da física moderna contemporânea, sendo a base para os modelos padrão da gravitação e da cosmologia. O seu enorme sucesso não se deve apenas à sua engenhosidade conceitual e elegância matemática, mas, principalmente, à sua habilidade em explicar fenômenos físicos reais. Um feito impressionante, uma vez que a maioria absoluta de efeitos gravitacionais relativísticos eram desconhecidos à época de sua concepção. Durante os últimos cem anos, entretanto, uma vasta afluência de dados experimentais e observacionais elevou o status da gravitação de curiosidade científica a ciência experimental fundamental.

Podemos considerar os primeiros quarenta e cinco anos da RG como o período no qual o seu estudo era apenas uma curiosidade no mundo da física teórica [1]. Os modelos cosmológicos durante a primeira década de existência da RG eram praticamente exercícios matemáticos, muitas vezes com motivações filosóficas, até a publicação de Hubble em 1929 sobre o afastamento das galáxias e a conseqüente expansão do universo [2]. Por sua vez, a RG só assume status relevante no começo dos anos de 1960, motivada pela observação de quasares a partir do fim da década de 1950 (cf. [3], [4] e [5]), da radiação cósmica de fundo em 1965 [6] e dos pulsares em 1967 [7]. É devido, portanto, a essas observações que a RG dá origem sistemática a inúmeras áreas de estudo como a astrofísica relativística e a cosmologia ascende à corrente principal de estudo.

Nesse contexto, surgem as primeiras teorias alternativas a RG, como Brans-Dicke [8] e as primeiras teorias $f(R)$ ([9] e referências nele contidas). Contudo, poucas das teorias

métricas alternativas desenvolvidas durante os anos 1970 e 1980 podem ser consideradas teorias bem motivadas do ponto de vista experimental e observacional, por exemplo. Muitas delas foram inventadas para provar a possibilidade de sua própria existência, num exercício matemático de criação de modelos consistentes, mas não necessariamente com o objetivo de descrever fenômenos físicos, ou para ilustrar propriedades particulares. Desde então, o cenário de teorias alternativas mudou, acompanhando a evolução no espectro de abrangência da ciência gravitacional.

Podemos classificar as teorias alternativas entre as competidoras diretas da RG, com o objetivo de tornarem-se teorias completas da gravitação (tendo a RG como limite); as que tentam quantizar a gravitação; as que tentam unificá-la com outras forças; e as que tentam atingir mais de um desses objetivos. As teorias métricas podem ser: escalares (cf. [10], [11], [12] e [13]), tensoriais [14], escalar-tensoriais (cf. [15], [16] e [17]) e vetoriais-tensoriais (cf. [18] e [19]), com referências citando apenas exemplos de teorias recentes e/ou revisões realizadas nos últimos anos.

Existem inúmeras teorias concorrentes a RG e, apesar das propriedades a serem satisfeitas por essas teorias variarem de teórico para teórico (de cosmólogo para cosmólogo!), existe pelo menos uma propriedade fundamental que todos os cientistas devem concordar: a teoria *deve* reproduzir as previsões correspondentes ao sistema solar, ao pulsar binário, e testes cosmológicos e experimentais realizados até hoje. E este requerimento pode ser dividido da seguinte maneira [20]:

- **Limite da RG.** Deve existir um limite contínuo tal como o limite de campo fraco, no qual as previsões da teoria são consistentes com a RG com precisão experimental;
- **Existência de soluções conhecidas.** A teoria deve admitir soluções que correspondam a fenômenos observáveis, incluindo, mas não limitados, ao espaço-tempo plano, estrelas Newtonianas e soluções cosmológicas;
- **Estabilidade das soluções.** As soluções especiais descritas no item anterior devem ser estáveis quando perturbadas em escalas de tempo menores que a idade do universo. Por exemplo, perturbações nas soluções para estrelas Newtonianas, como impacto de asteróides, não devem causar instabilidades.

Uma vez que a teoria passe por essas três etapas podemos avaliar seu status e enquadrá-la entre outras teorias alternativas, competitivas ou não, mas totalmente caracterizadas, com um estudo completo sobre seus limites, vantagens e desvantagens. Um exemplo de teorias alternativas e sua caracterização pode ser visualizado na tabela 1.1, uma versão adaptada e atualizada da tabela apresentada em [21].

Dentro deste cenário, a teoria geométrico-escalar da gravitação (GSG) [13], proposta em 2012, aparece como potencial competidora da RG. A GSG descreve o campo gravitacional em função do campo escalar Φ agindo sobre o espaço-tempo representado pela geometria Riemanniana; apresenta equação dinâmica não-linear; segue o princípio de covariância, indo além do domínio da relatividade especial; e as partículas testes percorrem trajetórias geodésicas.

As hipóteses que constituem a GSG são completamente distintas das assumidas por Einstein e Grossmann (EG) durante sua tentativa de construir uma teoria escalar para a gravitação [26]. A teoria de EG corroborou historicamente com o descrédito atribuído às teorias escalares. Na conjectura de EG¹,

- a teoria é descrita por uma geometria conformalmente plana e o espaço-tempo de Minkowski é uma métrica observável;
- a fonte do campo gravitacional é o traço do tensor energia-momento;
- o campo escalar é a generalização do potencial Newtoniano, segundo a relatividade especial.

Essa descrição não conserva a energia gravitacional e não segue o princípio universal da queda livre, deixando claro porque todas as tentativas posteriores de construção de teorias escalares baseadas nesse modelo falharam, levando a comunidade científica a presumir a impossibilidade de uma teoria escalar para a gravitação.

Breve digressão sobre a teoria *Entwurf*

Segundo as referências [26] e [11].

Considere a “óbvia” generalização da equação de Poisson

$$\Delta\Psi = 4\pi G\rho$$

juntamente com a (não tão óbvia) generalização da equação de movimento

$$\frac{d^2\vec{\chi}(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla}\Psi(\vec{\chi}(t)),$$

com ambas obedecendo o princípio da relatividade especial. O estudo do sistema acima conduz a uma teoria na qual a aceleração vertical de uma partícula teste sujeita a ação de um campo gravitacional vertical homogêneo e estático depende

¹Nesse trabalho, EG mostraram que as hipóteses apresentadas na teoria de *Entwurf* recaem na teoria de Nordstrom [27], que a primeira teoria escalar da gravitação.

da velocidade inicial horizontal e também da energia interna da partícula, em clara violação do princípio de queda livre e da conservação de energia.

De fato, qualquer teoria escalar oriunda da relatividade especial na qual o campo gravitacional acopla-se à matéria exclusivamente através do traço do tensor energia-momento necessariamente viola a conservação de energia e é, portanto, fisicamente inconsistente. Entretanto, o próprio Einstein admite que seria possível resolver o problema da violação de energia se abandonássemos a hipótese de que as medidas de tempo e espaço estão intrinsecamente relacionadas com a métrica de Minkowski, ou seja, se considerássemos que o espaço-tempo de Minkowski não é um observável físico.

De uma maneira ou de outra, a tentativa (frustrada) de Einstein e Grossmann em elaborar uma teoria escalar para a gravitação firmou a convicção do autor da relatividade geral na validade do princípio geral de covariância como substituto imprescindível do princípio da relatividade especial, o que veio a ser fundamental na conceitualização da RG.

No caso da GSG, nenhuma das antigas hipóteses de Einstein e Grossmann são realizadas: a métrica de Minkowski é auxiliar e a fonte do tensor energia-momento não está unicamente contida no seu traço. A descrição matematicamente consistente que a GSG oferece à gravitação está estruturada nas seguintes hipóteses fundamentais:

- a interação gravitacional é descrita pelo campo escalar Φ ;
- o campo Φ possui uma dinâmica não-linear;
- a teoria satisfaz o princípio geral de covariância;
- todos os tipos de matéria e energia interagem com Φ somente através da métrica pseudo Riemanniana $q_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + \beta \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$, onde α e β são funções livres que dependem do potencial $V(\Phi)$ a ser descrito pela GSG (Veja quadro a seguir).

as quais foram escolhidas de forma a descrever a gravidade como um fenômeno escalar de modo consoante com a ponte dinâmica, descrita em [28], entre os espaço-tempo curvos e a métrica de Minkowski.

Motivação teórica para a GSG

Segundo a referência [28].

Em 2011, foi mostrado que é possível construir uma *ponte dinâmica* entre o espaço-tempo plano de Minkowski e um espaço-tempo curvo desde que as Lagrangianas

sigam o seguinte lema:

Lemma 1.1. *Dada a Lagrangiana $L = V(\Phi)w$, onde $w = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$, com um potencial arbitrário $V(\Phi)$, a teoria de campos satisfazendo a equação de movimento*

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu (\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) + \frac{w}{2} \frac{d \ln V}{d\Phi} = 0,$$

no espaço-tempo de Minkowski é equivalente ao campo não-massivo de Klein-Gordon $\square \Phi = 0$ na métrica $g^{\mu\nu}$ desde que as funções $\alpha(\Phi)$ e $\beta(\Phi)$ satisfaçam a condição

$$\alpha + \beta = \alpha^3 V. \quad (1.1)$$

Notavelmente, para essas Lagrangianas especiais a propagação das descontinuidades do campo Φ e a sua dinâmica são controladas pela mesma estrutura métrica. E, além disso, graças à duplicidade da representação, é possível descrever a dinâmica do campo tanto no espaço-tempo de Minkowski, quanto no espaço-tempo curvo representado pela métrica efetiva $g^{\mu\nu}$.

A característica não-linear do campo Φ permite às suas descontinuidades propagarem-se como geodésicas nulas da métrica efetiva e, por isso, a auto-interação de Φ pode ser entendida como o acoplamento mínimo entre o campo e sua própria métrica efetiva, motivando a interpretação do seu comportamento como um fenômeno de cunho gravitacional. Surge então a questão: é plausível estender o alcance desses resultados de maneira a desenvolver uma teoria da gravitação matematicamente consistente e completamente escalar?

Eis aqui o ponto de partida da GSG.

O próximo passo é avaliar a compatibilidade da teoria com os testes clássicos da gravitação². Tal análise vem sendo feita nos últimos anos tendo alcançado os seguintes resultados em acordo com as observações:

- descrição do desvio geodésico da luz;
- explicação do avanço do periélio de Mercúrio;

²No tocante ao ponto de vista observacional é imprescindível uma teoria escalar com mais graus de liberdade a fim de abranger, por exemplo, a descrição de estrelas com rotação, entre outros objetos com spin. Esse tipo de situação está sendo abordada na teoria generalizada da GSG [29]. A teoria possui dois campos escalares independentes que podem ser “ligados” ou “desligados” de acordo com a quantidade de parâmetros necessária na descrição do fenômeno a ser estudado. Por se tratar de uma extensão da GSG, todos os resultados obtidos na sua formulação original continuam válidos.

- descrição de aproximadamente 90% da população de estrelas, correspondentes às estrelas em equilíbrio hidrostático³.

Além disso, a GSG satisfaz o teorema de Birkhoff, define completamente a energia gravitacional e apresenta clara possibilidade quanto à descrição quântica da gravitação, em oposição às dificuldades da RG nessas duas questões. Desse modo, vemos como caminho natural a continuidade da análise sistemática da GSG a fim de, posteriormente, estabelecer seu status enquanto teoria alternativa da gravitação. Para empreender esse propósito, escolhemos a trajetória histórica dos testes clássicos da gravitação.

A intenção do presente trabalho é caracterizar as soluções estáticas esfericamente simétricas da GSG, com foco no estudo das soluções do vácuo e soluções internas que possam ser usadas na descrição de estrelas, no que tange estruturas esféricas no vácuo. No escopo deste trabalho apresentaremos os resultados referentes à validade do teorema de Birkhoff, à estabilidade das órbitas de partículas não massivas de spin 0 na métrica de Schwarzschild para a GSG, às estrelas Newtonianas e às estrelas incompressíveis. Ainda apresentaremos um comentário sobre um modelo estelar para a GSG no capítulo B.

Os resultados da GSG em relação aos testes no sistema solar e em cosmologia podem ser acompanhados, respectivamente, em ([13]) e ([25], [30]).

³Todas as estrelas da sequência principal do diagrama Hertzsprung–Russell estão em equilíbrio hidrostático, independente de outras características que possam apresentar, como rotação, campo magnético, carga elétrica, etc.

TABELA 1.1: Comparação entre algumas teorias da gravitação

Teoria	Métrica	Campos	Elementos livres	Status
Newtoniana (1687)[21]	sem métrica	potencial	nenhum	teoria não-relativística
Nordstrom (1913)[21]	Minkowski	escalar	nenhum	os fótons não interagem gravitacionalmente
Relatividade geral (1915) [21]	dinâmica	tensorial	nenhum	viável
Belifante-Swihart (1957) [21] e [22]	sem métrica	tensorial	parâmetro K	falhou no experimento de Dicke-Braginsky
Brans-Dicke (1961) [21] e [23]	dinâmica	escalar-tensorial	parâmetro ω	viável para $\omega > 40,000$
Ni (1970) [21]	Minkowski	tensorial, vetorial e escalar	1 parâmetro e 3 funções	prediz referências preferenciais em contração com as observações
Rosen (1973)[21]	fixa	tensorial	nenhum	contradiz as observações de pulsares binários
Rastall (1976)[21]	Minkowski	tensorial e vetorial	nenhum	falha na descrição de campos gravitacionais fortes
MOND (1983) [21]	sem métrica	potencial	1 função livre	teoria não-relativística
TeVes (2004) [18] e [24]	dinâmica	tensorial, vetorial e escalar	1 função livre	não compatível com as observações de matéria escura
GSG (2012) [13] e [25]	dinâmica	escalar	nenhum	não apresenta solução interna para estrelas

Capítulo 2

Teoria geométrico-escalar da gravitação

Cumo o fano u letto si curcono

O Universo que habitamos é aquele que construímos.

Provérbio calabrês

— (...) Podia me dizer, por favor, qual é o caminho que devo seguir?

— Isso depende do lugar para onde você quer ir, disse o Gato.

— Não tenho destino certo, disse Alice.

— Nesse caso não importa muito por onde você vá.

Lewis Carroll

Esta seção é uma versão adaptada do artigo original da GSG [13].

Conforme dito na introdução 1, as hipóteses de Einstein e Grossmann para a teoria *Entwurf* sobre a descrição escalar da gravitação levaram à construção de uma teoria inconsistente que, por sua vez, corroborou com um cenário desfavorável para novas representações escalares da gravitação (veja os recentes trabalhos [10], [11] e [12]). A teoria escalar de Einstein-Grossmann supõe que

- a teoria é descrita numa métrica conformalmente plana, e a métrica de Minkowski é observável;
- a fonte do campo gravitacional é o traço do tensor energia-momento;
- o campo escalar é a generalização do potencial Newtoniano segundo a relatividade especial.

A GSG propõe uma nova descrição escalar para a gravitação realizando uma abordagem matematicamente consistente e livre das hipóteses de Einstein-Grossmann e de suas frustradas consequências. Em linhas gerais, a GSG fundamenta-se nos seguintes princípios:

- a interação gravitacional é descrita pelo campo escalar Φ ;
- o campo Φ satisfaz uma dinâmica não-linear;
- a teoria satisfaz o princípio geral de covariância, não sendo portanto restrita à relatividade especial;
- toda matéria e energia interage com o campo Φ somente através da métrica pseudo-Riemanniana $q_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + \beta \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$, para a qual os parâmetros α e β são funções de Φ e são completamente determinados pela Lagrangiana do campo.

Além disso, nenhuma das hipóteses da teoria de Einstein-Grosman são satisfeitas: a métrica de Minkowski não é observável; a fonte do campo Φ não depende apenas do traço do tensor energia-momento; e Φ relaciona-se de uma maneira não-trivial com o potencial Newtoniano Φ_N . Como consequência imediata da teoria, as partículas testes seguem geodésicas com relação a métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$, assim como as ondas eletromagnéticas.

A elaboração da GSG segue os principais passos da GR, ou seja, existe uma única entidade geométrica que interage com todas as formas de matéria e energia e a geometria de todos os eventos é governada pelo fenômeno gravitacional. E, da mesma forma que na RG, a métrica está minimamente acoplada com todos os campos do modelo padrão, ou seja, podemos substituir a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por $q_{\mu\nu}$.

Para determinar a forma da dinâmica na GSG foi adotado um procedimento de ajuste observacional entre os coeficientes da expansão em série do campo Φ com os coeficientes de um campo, em regime quase linear, gerado por uma fonte massiva (como o Sol) ao descrever o movimento de partículas testes. De forma que a dinâmica da GSG é construída de acordo com as observações do sistema solar.

Vejamos com um pouco mais de detalhes como a GSG foi formulada.

2.1 Ponto de partida

Vamos começar considerando a seguinte Lagrangiana no espaço-tempo de Minkowski:

$$L = V(\Phi) w, \quad (2.1)$$

na qual $w \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$, sendo $w \neq 0$, e $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski, entretanto podemos utilizar qualquer outro sistema de coordenadas uma vez que a teoria é covariante e não apresenta referenciais preferenciais. Note que se $V = 1/2$ obtemos o campo escalar não massivo de Klein-Gordon. No caso geral, o termo cinético é redimensionado pelo campo potencial $V(\Phi)$. A equação de campo é

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu (\sqrt{-\eta} \partial_\nu \Phi \eta^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \frac{V'}{V} w = 0, \quad (2.2)$$

onde $V' \equiv dV/d\Phi$ e η é o determinante de $\eta_{\mu\nu}$.

É crucial, para o entendimento da GSG, atentarmos para o seguinte resultado: o campo da equação anterior (2.2) pode ser visto como um campo não massivo de Klein-Gordon propagando-se num espaço-tempo governado pelo próprio Φ . Em outras palavras, o mesmo campo pode ser escrito em termos da métrica de Minkowski ou de uma métrica curva específica, construída em termos de Φ . Seguindo os passos realizados em [28], é introduzido o tensor métrico contravariante $q^{\mu\nu}$ através da fórmula binomial

$$q^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi, \quad (2.3)$$

na qual os parâmetros α e β são funções adimensionais de Φ e w . Note que a quantidade w pode ser escrita em termos da correspondente

$$\Omega \equiv \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi q^{\mu\nu},$$

desde que a teoria seja fixada em termos de um Lagrangiano específico. De fato, temos

$$\Omega = (\alpha + \beta) w.$$

Desta última, dados α e β nós obtemos Ω como função de w .

A expressão covariante correspondente, definida como a inversa $q_{\mu\nu} q^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, é também uma expressão binomial:

$$q_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi. \quad (2.4)$$

As funções α e β são fixadas de forma que a equação dinâmica (2.2) tome a forma

$$\square \Phi = 0, \quad (2.5)$$

sendo \square o operador de Laplace-Beltrami com relação a métrica $q_{\mu\nu}$, isto é

$$\square \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-q}} \partial_\mu (\sqrt{-q} \partial_\nu \Phi q^{\mu\nu}).$$

Para escrever a equação (2.3) nesta configuração é necessário calcular o determinante da métrica $q = \det q_{\mu\nu}$, para o qual

$$\sqrt{-q} = \frac{\sqrt{-\eta}}{\alpha \sqrt{\alpha(\alpha + \beta)}}. \quad (2.6)$$

E, de acordo com a equação (2.3), temos que

$$q^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi = (\alpha + \beta) \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi. \quad (2.7)$$

O resultado final pode ser enunciado no lema (1.1), já mencionado na introdução 1, *Dada a Lagrangiana $L = V(\Phi)w$, onde $w = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$, com um potencial arbitrário $V(\Phi)$, a teoria de campos satisfazendo a equação de movimento*

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu (\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) + \frac{w}{2} \frac{d \ln V}{d\Phi} = 0,$$

no espaço-tempo de Minkowski é equivalente ao campo não-massivo de Klein-Gordon $\square \Phi = 0$ na métrica $q^{\mu\nu}$ uma vez que as funções $\alpha(\Phi)$ e $\beta(\Phi)$ satisfaçam a condição

$$\alpha + \beta = \alpha^3 V. \quad (2.8)$$

Esta equivalência é válida para qualquer dinâmica descrita na métrica de Minkowski pela Lagrangiana L, e pode ser estendido para outros tipo de Lagrangianas não-linear. (Veja referência [31] para maiores detalhes.)

2.2 O limite Newtoniano

Para estabelecer a GSG como teoria da gravitação, é imprescindível compará-la com as observações: testes clássicos da gravitação, cosmologia, eletromagnetismo, etc. E, antes de começar esse processo, é preciso determinar como a teoria descreve o limite de campo fraco, ou seja, sua relação com a gravitação Newtoniana.

Novamente enfatizamos que o campo escalar Φ não é uma generalização do potencial Newtoniano segundo a relatividade especial. Com efeito, acompanhando o procedimento de elaboração da RG [32] e assumindo que as partículas testes seguem geodésicas com relação a métrica $q_{\mu\nu}$, temos

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i = -\partial^i \Phi_N, \quad (2.9)$$

considerado o campo fraco e que as partículas testes movem-se com baixas velocidades.

Da equação (2.4) obtemos

$$\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2} \partial^i \ln \alpha.$$

Segue que o potencial Newtoniano Φ_N é aproximadamente

$$\Phi_N \approx -\frac{1}{2} \ln \alpha,$$

o que implica na relação entre a métrica $q_{\mu\nu}$ e o potencial Newtoniano Φ_N

$$q_{00} = \frac{1}{\alpha} \approx 1 + 2\Phi_N.$$

Usando a equação (2.5) obtemos a equação Newtoniana para o vácuo

$$\nabla^2 \Phi_N = 0.$$

Este foi o caminho seguido por Einstein no estabelecimento da RG. A GSG, por outro lado, segue outro caminho que descrevemos a seguir, explorando as consequências da extrapolação da expressão aproximada para q_{00}

$$\alpha = e^{-2\Phi}. \quad (2.10)$$

O próximo passo é determinar a dependência funcional de β em termos de Φ ou do potencial $V(\Phi)$ já que

$$\beta = \alpha (\alpha^2 V - 1).$$

2.3 Solução estática esfericamente simétrica

Qualquer teoria da gravitação deve explicar as órbitas planetárias. Na RG esse movimento é descrito por geodésicas na métrica de Schwarzschild. Na GSG as partículas seguem geodésicas com relação a métrica $q_{\mu\nu}$.

Seja a métrica auxiliar de Minkowski escrita em coordenadas esféricas

$$ds_M^2 = dt^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2. \quad (2.11)$$

Mudando a coordenada radial para $R = \sqrt{\alpha} r$, onde $\alpha = \alpha(r)$, temos

$$ds_M^2 = dt^2 - \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 dr^2 - \alpha r^2 d\Omega^2. \quad (2.12)$$

A métrica gravitacional (2.4) assume a forma

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} dt^2 - B dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.13)$$

para a qual definimos

$$B(\alpha, r) \equiv \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2.$$

A equação de campo (2.5) em simetria esférica reduz-se ao caso

$$\frac{r^2 \sqrt{\alpha + \beta}}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^{-1} \frac{d\Phi}{dr} = \Phi_0, \quad (2.14)$$

sendo Φ_0 uma constante.

Da relação imposta pelo lema (1.1)

$$V = \frac{\Xi}{\alpha^3},$$

segue que Ξ fixa o potencial. Da equação (2.13) temos que

$$-q_{11} \equiv B = \frac{\alpha(\alpha - 3)^2}{4\Xi}. \quad (2.15)$$

As observações conseguem determinar até a segunda ordem de $x \equiv \frac{r_H}{r}$, sendo r_H o raio de Schwarzschild. Isso significa que podemos confiar no coeficiente q_{11} dado por

$$B \approx 1 + x + x^2. \quad (2.16)$$

Portanto, podemos assegurar uma expansão de Ξ até segunda ordem em α . De fato, se fixarmos

$$\Xi \equiv W \alpha^2 + N \alpha + P, \quad (2.17)$$

substituindo na expressão (2.15) e expandindo todos os termos até segunda ordem $O(x^2)$ e observando que

$$q_{00} = \frac{1}{\alpha} = 1 - x$$

implicando em

$$\alpha \approx 1 + x + x^2,$$

segue que

$$W = \frac{1}{4}; \quad N = -\frac{3}{2}; \quad P = \frac{9}{4}.$$

Em outras palavras, obtemos

$$\Xi = \frac{(\alpha - 3)^2}{4}$$

e conseqüentemente

$$V = \frac{(\alpha - 3)^2}{4\alpha^3}. \quad (2.18)$$

Substituindo as equações (2.10) e (2.18) em (2.14) obtemos

$$e^{2\Phi} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\Phi_0}{r^2}, \quad (2.19)$$

e, portanto,

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(2c_1 - 2\frac{\Phi_0}{r} \right), \quad (2.20)$$

sendo c_1 uma constante de integração.

O comportamento assintótico impõe que $c_1 = 1/2$ e $\Phi_0 = MG/c^2$, onde M é a massa da fonte gravitacional, G é a constante de Newton e c a velocidade da luz, ou seja,

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r_H}{r} \right) \quad (2.21)$$

com $r_H \equiv 2MG/c^2$. Note que o campo Φ é equivalente ao campo Newtoniano no limite de campo fraco. Conseqüentemente o elemento de linha (2.13) pode ser escrito como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_H}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.22)$$

Esta geometria tem a mesma forma que na RG e está de acordo com os testes no sistema solar. Portanto, a GSG oferece uma descrição satisfatória para as órbitas planetárias e também para as trajetórias luminosas (geodésicas tipo-tempo e tipo-nula, respectivamente). Se novas observações requisitarem uma modificação na métrica nas vizinhanças de um objeto massivo, basta reajustar a forma do potencial $V(\Phi)$.

2.4 Equação dinâmica

Vamos começar escrevendo a ação para a métrica auxiliar de Minkowski. Do princípio variacional

$$\delta S_1 = \delta \int \sqrt{-\eta} d^4x L \quad (2.23)$$

obtemos

$$\delta S_1 = - \int \sqrt{-\eta} d^4x (V' w + 2V \square_M \Phi) \delta \Phi \quad (2.24)$$

para a qual

$$\square_M \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu (\sqrt{-\eta} \partial_\nu \Phi \eta^{\mu\nu})$$

é o operador D'Alembertiano no espaço plano (em coordenadas gerais). Usando a ponte dinâmica para passar do espaço plano para o espaço curvo, obtemos

$$\delta S_1 = -2 \int \sqrt{-q} d^4x \sqrt{V} \square \Phi \delta \Phi. \quad (2.25)$$

Na presença de matéria adicionamos o correspondente termo Lagrangiano L_m na ação total:

$$S_m = \int \sqrt{-q} d^4x L_m. \quad (2.26)$$

A primeira variação deste termo resulta em

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-q} d^4x T^{\mu\nu} \delta q_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

sendo que o tensor energia-momento é definido da forma usual

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-q}} \frac{\delta(\sqrt{-q} L_m)}{\delta q^{\mu\nu}}.$$

O princípio geral de covariância implica na conservação do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$. A equação de movimento é obtida através do princípio da mínima ação

$$\delta S_1 + \delta S_m = 0.$$

Até esse ponto a GSG segue o procedimento da GR. Na GSG, entretanto, a métrica $q_{\mu\nu}$ não é uma quantidade fundamental. A variação de $\delta q_{\mu\nu}$ é escrita em função de $\delta \Phi$:

$$\delta q_{\mu\nu} = \delta \left(\frac{1}{\alpha} \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha \Xi w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right). \quad (2.28)$$

Por enquanto estamos usando a métrica não observável de Minkowski por simplicidade. Mas ao final todas as expressões devem ser escritas em termos da métrica gravitacional $q_{\mu\nu}$. Com alguns cálculos, obtemos

$$\frac{\delta S_m}{\delta \Phi} = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-q} d^4x \left((E - T) \frac{d}{d\Phi} \ln \alpha - E \frac{d}{d\Phi} \ln \Xi + 2\nabla_\lambda C^\lambda \right),$$

lembrando que $\Xi \equiv \alpha + \beta = \alpha^3 V$. Note também as definições das quantidades

$$T = T^{\mu\nu} q_{\mu\nu}, \quad E = \frac{T^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi}{\Omega},$$

e

$$C^\lambda = \frac{\beta}{\alpha \Omega} \left(E q^{\lambda\mu} - T^{\lambda\mu} \right) \partial_\mu \Phi.$$

Lembrando que $\Omega \equiv \hat{q}_{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$.

E finalmente a equação para o movimento do campo gravitacional Φ toma a forma

$$\sqrt{V} \square \Phi = -\kappa \chi, \tag{2.29}$$

sendo

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (T - E) \frac{d}{dr} \ln \alpha + \frac{1}{2} E \frac{d}{dr} \ln \Xi - \nabla_\lambda C^\lambda \right).$$

Substituindo o valor $\alpha = e^{-2\Phi}$ e usando a equação (2.18) para o potencial V , podemos reescrever a última expressão na forma

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{3e^{2\Phi} + 1}{3e^{2\Phi} - 1} E - T - \nabla_\lambda C^\lambda \right).$$

A equação (2.29) e a definição de χ descrevem a dinâmica da GSG na presença de matéria sob as hipóteses (2.10) e (2.18). A quantidade χ contém um acoplamento não-trivial entre o gradiente do campo escalar $\nabla_\mu \Phi$ e todas as componentes do tensor energia-momento, e não apenas o seu traço. Esta propriedade permite que o campo eletromagnético interaja com o campo gravitacional. Do limite Newtoniano, podemos identificar k como

$$k \equiv \frac{8\pi G}{c^4}.$$

2.5 Campo electromagnético

O princípio de equivalência é satisfeito se todos os tipos de matéria e energia interagem com o campo gravitacional através do acoplamento mínimo com a métrica $q_{\mu\nu}$. As

antigas teorias da gravitação¹, assumem que o campo escalar gera somente uma métrica conformalmente plana e que o traço do tensor momento-energia é a única fonte da gravitação. Estas hipóteses geram inconsistências e não estão presentes na GSG. Na GSG, o campo eletromagnético, assim como todos as outras formas de matéria e energia, interage com o campo escalar através da métrica $q_{\mu\nu}$.

O termo Lagrangiano correspondente à contribuição eletromagnética é dado por

$$L = F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} q^{\mu\nu} q^{\alpha\beta}. \quad (2.30)$$

E a equação de campo é obtida através do princípio variacional

$$\delta \int \sqrt{-q} d^4x L = 0$$

resultando em

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.31)$$

para a qual $F^{\mu\nu} \equiv F_{\alpha\beta} q^{\alpha\mu} q^{\beta\nu}$ e a operação $X^{\mu\nu}{}_{;\alpha}$ representa a derivada covariante de um tensor $X^{\mu\nu}$ com respeito à métrica $q_{\alpha\beta}$. As condições de Hadamard [33] sobre as descontinuidades retornam a relação de dispersão

$$k_\mu k_\nu q^{\mu\nu} = 0,$$

sendo $k_\mu \equiv \partial_\mu \Sigma$ o gradiente da função Σ que define a superfície de descontinuidade. As ondas eletromagnéticas, portanto, propagam-se ao longo de geodésicas nulas da geometria $q_{\mu\nu}$.

2.6 Panorama

A GSG mostra que é possível construir uma teoria da gravitação de maneira consistente sem as desvantagens das antigas teorias escalares da gravitação. Seu processo de elaboração é fundamentado nas mesmas hipóteses que a RG: a métrica de Minkowski não é um observável e todas as formas de matéria e energia interagem com o campo Φ unicamente através da métrica gravitacional

$$q^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi,$$

onde

$$\alpha = e^{-2\Phi},$$

¹Veja [27] para ler sobre a primeira teoria escalar da gravitação de Nordstrom e [11] com um estudo sobre as hipóteses que estabeleceram todas as teorias escalares da gravitação subsequentes.

$$\beta = \alpha (\alpha^2 V - 1) ,$$

e a relação entre as funções α e β é dada pelo lema que descreve uma classe de sistemas dinâmicos, com Lagrangiana definida por $L = V(\Phi)w$, representados duplamente no espaço-tempo de Minkowski e no espaço-tempo curvo correspondente.

A auto-interação do campo escalar é descrita pelo potencial $V(\Phi)$ que multiplica o termo cinético. Diferentes formas de $V(\Phi)$ geram diferentes teorias da gravitação. A GSG original considera a escolha particular

$$V(\Phi) = \frac{(\alpha - 3)^2}{4\alpha^3} .$$

Tal escolha permite soluções em concordância com os testes clássicos da gravitação no sistema solar e, até então, essa é a única escolha de potencial que nos permite este tipo de solução. Entretanto, ainda não está demonstrado se essa escolha é única.

Dentro desse cenário, a GSG passa então a realizar os testes necessários ao seu estabelecimento como teoria alternativa da gravitação. Até o presente momento, o panorama da GSG mostra-se em conformidade com a descrição do movimento orbital de partículas massivas e não massivas no sistema solar [13] e de estrelas Newtonianas. Do ponto de vista teórico, a GSG oferece uma descrição tensorial para a energia gravitacional [34] e satisfaz o teorema de Birkhoff.

Este trabalho é dedicado à compreensão da GSG no contexto dos testes clássicos da gravitação e outras consequências relevantes ligadas às soluções estáticas esfericamente simétricas. No próximo capítulo vamos discutir e apresentar resultados da GSG com relação

- ao teorema de Birkhoff;
- à estabilidade das órbitas de partículas não massivas na métrica de Schwarzschild;
- às estrelas Newtonianas;
- às estrelas incompressíveis.

No capítulo 5 comentaremos sobre uma classe de soluções da GSG que satisfazem a equação $\square\Phi = 0$ para $p \neq 0$ e $\rho \neq 0$. Como este trabalho diferencia-se da natureza a qual esta tese se propõe, optamos por apresentá-lo separado da parte principal.

Outras discussões sobre importantes resultados da GSG na cosmologia podem ser encontradas em [25] e [30].

Capítulo 3

Soluções estáticas esfericamente simétricas da teoria geométrico-escalar da gravitação

Contribuição original da candidata

3.1 Teoria geométrico-escalar da gravitação: glossário de equações

A título de melhor explorar os resultados do presente capítulo, vamos rerepresentar nesta seção as equações do capítulo 2 necessárias ao entendimento das futuras análises. Nós começamos por reintroduzir o tensor métrico contravariante $q^{\mu\nu}$ através da fórmula binomial

$$q^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{w} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi, \quad (3.1)$$

para a qual $w = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$ e os parâmetros α e β são funções adimensionais de Φ . A expressão covariante correspondente, definida como a inversa $q_{\mu\nu} q^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, também é uma expressão binomial:

$$q_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)w} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi. \quad (3.2)$$

A relação entre os parâmetros α e β é dada pelo lema (1.1), de tal forma que

$$\alpha + \beta = \alpha^3 V. \quad (3.3)$$

A dinâmica da GSG é determinada ao fixarmos os coeficientes da expansão em série do campo escalar Φ de acordo com análise das órbitas planetárias na teoria. Sendo assim, o potencial $V(\Phi)$ é

$$V(\Phi) = \frac{1}{4} \frac{(\alpha - 3)^2}{\alpha^3}, \quad (3.4)$$

onde $\alpha(\Phi) = e^{-2\Phi}$, definido por extrapolação¹. As condições estão de acordo com os testes do sistema solar, e descrevem a solução do vazio através da métrica de Schwarzschild.

Seguindo os passos de desenvolvimento da RG, a equação dinâmica da GSG pode ser escrita como

$$\sqrt{V} \square \Phi = +\kappa \chi, \quad (3.5)$$

para a qual

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{d \ln \alpha}{d\Phi} (T - E) + \frac{E}{2} \frac{d \ln(\alpha + \beta)}{d\Phi} - \nabla_\lambda C^\lambda \right),$$

e

$$T = T^{\mu\nu} q_{\mu\nu}, \quad E = \frac{T^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi}{\Omega}, \quad \Omega = q^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi,$$

$$C^\lambda = \frac{\beta}{\alpha \Omega} \left(E q^{\lambda\mu} - T^{\lambda\mu} \right) \partial_\mu \Phi,$$

sendo $k \equiv 8\pi G/c^4$.

3.1.1 Métrica esfericamente simétrica da GSG

Prosseguimos com a definição da métrica auxiliar de Minkowski em coordenadas esféricas

$$ds_M^2 = dt^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2, \quad (3.6)$$

sendo $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$.

Aplicando a mudança de coordenada radial $R = \sqrt{\alpha} r$, onde $\alpha = \alpha(r)$, obtemos

$$ds_M^2 = dt^2 - \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 dr^2 - \alpha r^2 d\Omega^2. \quad (3.7)$$

A métrica gravitacional (3.2) toma a forma

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} dt^2 - B dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.8)$$

¹Veja capítulo 2, seção 2.2, "O limite Newtoniano".

usando a seguinte definição para a função B :

$$B \equiv \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2,$$

que pode ser reescrita de acordo com o potencial $V(\Phi)$, dado pela equação (3.4), como

$$B = \alpha \Sigma^2, \quad (3.9)$$

onde

$$\Sigma = -\frac{2\alpha + r \frac{d\alpha}{dr}}{\alpha(\alpha - 3)}. \quad (3.10)$$

Se escolhermos uma classe de observadores comóveis $V_\mu = \delta_\mu^0 / \sqrt{\alpha}$ a equação de movimento (3.5) devolve

$$\sqrt{V} \square \Phi = +\kappa \left[\frac{3 - 2\alpha}{3 - \alpha} p - \frac{\rho}{2} \right] \quad (3.11)$$

da qual decorrem da função $\chi(\Phi)$ as subseqüentes quantidades: $T = \rho - 3p$, $E = -p$ e $C^\lambda = 0$ para essa classe de observadores.

Uma forma mais explícita para a equação (3.11) pode ser obtida ao atentarmos que

$$V = \frac{\left(1 - r \frac{d\Phi}{dr}\right)^2}{\alpha^3 \Sigma^2}, \quad (3.12)$$

e $V \rightarrow 1$ quando $\alpha \rightarrow 1$, temos também

$$\sqrt{V} = \frac{\left(1 - r \frac{d\Phi}{dr}\right)}{\alpha^{3/2} \Sigma}, \quad (3.13)$$

produzindo uma forma simples para o D'Alembertiano de Φ :

$$\square \Phi = \frac{1}{\Sigma r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \frac{d\Phi}{dr}}{\alpha \Sigma} \right). \quad (3.14)$$

A equação de movimento (3.11) fica, portanto,

$$\frac{\left(1 - r \frac{d\Phi}{dr}\right)}{\alpha^{3/2} \Sigma^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \frac{d\Phi}{dr}}{\alpha \Sigma} \right) = +k \left(\frac{3 - 2\alpha}{\alpha - 3} p + \frac{\rho}{2} \right). \quad (3.15)$$

A projeção da equação de conservação do tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ sobre o tri-espaco é

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} h_{\mu\alpha} = 0,$$

sendo o tensor projeção $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$. A última equação provê a consequente equação para fluido perfeito

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr}. \quad (3.16)$$

As equações (3.15), (3.16) e a equação de estado $p = p(\rho)$ completam o cenário para o estudo das soluções esfericamente simétricas da GSG.

3.2 Soluções do vácuo

Observemos atentamente a equação (3.15). O lado direito da equação nos dá duas diferentes interpretações físicas para a solução de $\square\Phi = 0$: ou a quadri-esfera é vazia ($p = 0$ e $\rho = 0$) ou estudamos a condição particular para a qual

$$p(r) = \frac{\rho(r)}{2} \left(\frac{3 - \alpha(r)}{3 - 2\alpha(r)} \right). \quad (3.17)$$

Surgem então as seguintes questões com relação à equação (3.17): existe uma equação de estado que satisfaça esse requerimento? Se existir, que tipo de fluido seria esse? Ou ainda, existe um estado inerte para o qual a matéria usual satisfaz essa equação? No capítulo B exporemos duas soluções esféricas interessantes da GSG sendo uma delas a métrica de Schwarzschild preenchida por um fluido em estado inerte. Faremos um breve comentário sobre um modelo estelar baseado nessas soluções no próximo capítulo.

Regressando à equação (3.15), nossa tarefa agora é encontrar as soluções de vácuo ($p = 0$ e $\rho = 0$) para a equação.

3.2.1 Da validade do teorema de Birkhoff na GSG

Resolvendo a equação (3.15) para $p = 0$ e $\rho = 0$:

$$\frac{(1 - r \frac{d\Phi}{dr})}{\alpha^{3/2} \Sigma^2 r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \frac{d\Phi}{dr}}{\alpha \Sigma} \right) = 0, \quad (3.18)$$

que nos traz

$$\frac{r^2 \frac{d\Phi}{dr}}{\alpha \Sigma} = C, \quad (3.19)$$

onde C é uma constante. Podemos reescrever a equação (3.19) recordando que $\alpha = e^{-2\Phi}$ e a definição de Σ na equação (3.10):

$$-\frac{r^2}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \alpha \Sigma C, \quad (3.20)$$

produzindo

$$C_1 \alpha^{3/2}(r) + \left(1 + \frac{2C}{r}\right) \alpha(r) = 1, \quad (3.21)$$

onde C_1 é uma constante e (3.21) é uma equação cúbica para qual distinguimos diversos casos através do discriminante

$$\Delta = 4 \left(1 + \frac{2C}{r}\right)^3 - 27(C_1)^2. \quad (3.22)$$

A análise de todas as configurações possíveis resulta em nove conjuntos de soluções reais²:

Quando $\Delta < 0$ existe uma única solução real para cada uma das combinações de C e C_1 das seguintes configurações:

(I) $C < 0$; $r > 2C $; $0 < C_1 < 2/9\sqrt{3}$; $\Sigma > 0$

(II) $C < 0$; $0 < r < 2C $; $C_1 > 0$; $\Sigma > 0$
--

(III) $C > 0$; $r > 2C$; $C_1 < -4/9\sqrt{6}$; $\Sigma > 0$ or $\Sigma < 0$
--

(IV) $C > 0$; $r > 2C$; $0 < C_1 < 4/9\sqrt{6}$; $\Sigma < 0$
--

(V) $C < 0$; $r > 2C$; $C_1 > 2/9\sqrt{3}$; $\Sigma < 0$

Quando $\Delta > 0$ existem três soluções reais para cada uma das combinações de C e C_1 das seguintes configurações:

(VI) $C > 0$; $0 < r < 2C$; $0 < C_1 < 4/9\sqrt{6}$; $\Sigma > 0$ or $\Sigma < 0$
--

(VII) $C < 0$; $r > 2C$; $0 < C_1 < 2/9\sqrt{3}$; $\Sigma > 0$ or $\Sigma < 0$

(III) $C > 0$; $0 < r < 2C$; $-4/9\sqrt{6} < C_1 < 0$; $\Sigma > 0$ or $\Sigma < 0$
--

(IV) $C > 0$; $0 < r < 2C$; $-2/9\sqrt{3} < C_1 < 0$; $\Sigma < 0$

Se $\Sigma > 0$ então $0 < \alpha < 3$ e $\frac{r}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} < -1$ ou $\alpha > 3$ e $-1 < \frac{r}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} < 1$. E se $\Sigma < 0$ então $0 < \alpha < 3$ e $-1 < \frac{r}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} < 1$ ou $\alpha > 3$ e $\frac{r}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} < -1$.

²As soluções imaginárias foram excluídas nessa abordagem.

Para o caso $p = \rho = 0$ e impondo que o limite de campo fraco seja válido ($\Phi \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 1$) nós temos $C_1 = 0$, $C < 0$ e os seguintes resultados para as funções da métrica (3.8)

$$\alpha = \left(1 + \frac{2C}{r}\right)^{-1}, \quad B = \alpha, \quad (3.23)$$

que correlacionam a constante C com a massa gravitacional da esfera e reconhecem a métrica de Schwarzschild, em acordo com o teorema de Birkhoff: *qualquer solução esfericamente simétrica das equações de campo do vácuo deve ser estática e assintoticamente plana*, o que significa que a solução exterior deve ser dada pela métrica de Schwarzschild:

$$\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad B = \alpha. \quad (3.24)$$

Esta é a única solução assintoticamente plana que a GSG tem para o vácuo. A partir daqui nos referimos ao valor constante $-C$ como M , a massa da fonte gravitacional.

Conforme o artigo original [13], o potencial V da GSG foi escolhido para satisfazer às observações do sistema solar, de tal forma que, se futuras observações reajustarem o valor da precessão dos periélios dos planetas, a GSG tem a possibilidade de acomodar os novos dados definindo um novo potencial, diferentemente da RG. Entretanto, no estágio atual de medidas tanto a GSG como a RG oferecem as mesmas descrições para órbitas de objetos massivos (como planetas) e partículas sem massa (como na observação do desvio geodésico da luz). [Veja no apêndice C alguns comentários adicionais.]

3.2.2 Estabilidade da solução do vazio

Considerando a duplicidade do lema (1.1), apresentado no capítulo introdutório 1, temos duas descrições equivalentes para a GSG no espaço-tempo de Minkowski e no espaço-tempo curvo dado pela métrica gravitacional $q^{\mu\nu}$. Baseados nesse fato, escolhemos arbitrariamente estudar a estabilidade da solução do vazio através da sua equação dinâmica no espaço plano para órbitas de partículas não massivas de spin 0.

Seja a equação de Klein-Gordon não-massiva no espaço curvo da métrica gravitacional $q^{\mu\nu}$: $\square\Phi = 0$. No contexto da GSG podemos reescrevê-la para o espaço plano de Minkowski como

$$\partial_\mu \left(\frac{\sqrt{-\eta}\sqrt{\alpha+\beta}}{\alpha^{3/2}} \partial^\mu \Phi \right) = 0, \quad (3.25)$$

onde η é o determinante da métrica plana $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, tal que $\partial^\mu \Phi \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi$ e lembrando que as funções α e β da métrica (3.1) foram escolhidas de forma que

$$\alpha = e^{-2\Phi}, \quad \beta = \frac{(\alpha-1)(\alpha-9)}{4}. \quad (3.26)$$

Propomos o estudo da perturbação da solução da equação (3.25) mantendo a métrica $\eta_{\mu\nu}$ fixa e escrita em coordenadas esféricas. A perturbação do campo Φ é dada por

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi \quad (3.27)$$

sendo Φ_0 o campo não perturbado e $\delta\Phi$ sendo uma pequena perturbação, ambas as funções dependentes de (t, R, θ, ϕ) .

Seguem as perturbações em primeira ordem das funções métricas (3.26) para a equação dinâmica (3.25) de acordo com (3.27)

$$\begin{aligned} \alpha^{-3/2} &\simeq \alpha_0^{-3/2} (1 + 3\delta\Phi) \quad \text{e} \\ (\alpha + \beta)^{1/2} &\simeq \frac{1}{2} \left[3 + \alpha_0 (1 - 2\delta\Phi) \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

sendo $\alpha_0 \equiv e^{-2\Phi_0}$ escrito em função de (t, R, θ, ϕ) .

Assim, quando adicionamos os termos perturbados à equação (3.25) de acordo com (3.27) e mantendo $\eta^{\mu\nu}$ fixo obtemos

$$\partial_\mu \left\{ \sqrt{-\eta} \alpha_0^{-3/2} (1 + 3\delta\Phi) [3 + \alpha_0 (1 - 2\delta\Phi)] \left(\partial^\mu \Phi_0 + \partial^\mu \delta\Phi \right) \right\} = 0. \quad (3.29)$$

Uma vez determinada a equação a ser perturbada (3.29), precisamos escolher a solução em torno da qual a perturbação será realizada. Conforme vimos na seção anterior, a solução de vácuo da equação dinâmica $\square\Phi = 0$ para a métrica gravitacional $q^{\mu\nu}$ é dada pela solução de Schwarzschild de tal forma que

$$\Phi = \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2}. \quad (3.30)$$

Paralelamente, a mesma solução (3.30) resolve a equação (3.25) para a transformação de coordenadas

$$R = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}. \quad (3.31)$$

Note que temos dois resultados distintos: a solução de Schwarzschild dada por (3.30) resolve $\square\Phi = 0$ e, independentemente, também é solução de (3.25) sob a transformação de coordenadas (3.31). Temos, portanto, a mesma solução para $\square\Phi = 0$ no espaço curvo e para a sua equação equivalente no espaço plano.

Sendo assim, perturbamos a equação (3.25) em torno da solução

$$\Phi_0 = \ln \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \right], \quad (3.32)$$

cujas perturbações (3.28) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \alpha^{-3/2} &\simeq \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{3/2} (1 + 3\delta\Phi) \text{ e} \\ (\alpha + \beta)^{1/2} &\simeq \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left(1 - \frac{3M}{r} \right) \left(1 + \frac{\delta\Phi}{1 - \frac{3M}{r}} \right), \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde r pode ser escrito em função de R através da transformação de coordenadas (3.31).

A métrica $\eta^{\mu\nu}$, em função de (t, R, θ, ϕ) , é mantida fixa, de forma que

$$\sqrt{-\eta} = R^2 \sin \theta. \quad (3.34)$$

Finalmente, das funções perturbadas (3.28) e da expressão para o determinante (3.34) temos a seguinte equação, também de ordem linear, seguindo a equação (3.29)

$$\partial_\mu \left\{ r^2 \sin \theta \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{3M}{r} \right) \left[\left(1 + \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1} \left(4 - \frac{9M}{r} \right) \delta\Phi \right) \partial^\mu \Phi_0 + \partial^\mu \delta\Phi \right] \right\} = 0. \quad (3.35)$$

Separando a equação anterior em ordem zero e primeira ordem temos:

$$\text{ordem zero : } \partial_\mu \left\{ r^2 \sin \theta \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{3M}{r} \right) \right\} = 0, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} 1^{\text{a}} \text{ ordem : } M \sin \theta \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1} \left(4 - \frac{9M}{r} \right) \delta\Phi \right] + \\ + \partial_\mu \left[r^2 \sin \theta \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{3M}{r} \right) \partial^\mu \delta\Phi \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

lembrando que $\frac{\partial}{\partial R} = \frac{dr}{dR} \frac{\partial}{\partial r}$.

Escolhemos decompor a perturbação nos modos de Fourier

$$\delta\Phi = Y_m^l(\theta, \phi) e^{-iEt} f(r) \quad (3.38)$$

sendo $Y_m^l(\theta, \phi)$ os harmônicos esféricos a satisfazer a equação $\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial Y_m^l}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 Y_m^l}{\partial \phi^2} = -l(l+1)Y_m^l$, com l inteiro, e $f(r)$, uma função arbitrária. A equação (3.37) torna-se

$$\begin{aligned} & M \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1} \left(4 - \frac{9M}{r}\right) f(r) \right] - \\ & - r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^2 \left[E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) l(l+1) \right] f(r) - \\ & \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{df}{dr} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

A análise da equação (3.39) é mais simples se a reescrevemos de forma análoga às equações que descrevem movimentos de partículas unidimensionais sujeitas a campos potenciais, da mesma forma quando estudamos movimentos orbitais em mecânica clássica. Assim, introduzimos outra coordenada “radial” ϱ de tal maneira que $f = g(\varrho)u(\varrho)$ e $g(\varrho)$ é arbitrária. Escolheremos ϱ e $g(\varrho)$ de forma a converter (3.39) na representação

$$\frac{d^2 u}{d\varrho^2} + (E^2 - V(r))u = 0. \quad (3.40)$$

Para tal, substituímos $f = g(\varrho)u(\varrho)$ na equação (3.39) obtendo

$$a \frac{d^2 u}{dr^2} + b \frac{du}{dr} + c u = 0, \quad (3.41)$$

sendo

$$a = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^3 \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-2} \left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} & = -\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-2} \left\{ \left[M \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1} \left(4 - \frac{9M}{r}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2}{g} \frac{dg}{dr} \right] \frac{d\varrho}{dr} - \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d\varrho}{dr} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

e

$$\begin{aligned} c = & E^2 - l(l+1) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-2} \left\{ \right. \\ & \left. \left[M \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1} \left(4 - \frac{9M}{r}\right) \right] + M \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1} \left(4 - \frac{9M}{r}\right) \frac{1}{g} \frac{dg}{dr} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Para (3.41) ser escrita como (3.40) temos que

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= 0 \quad e \\ c &= E^2 - V(r). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por fim, encontramos

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \\ g(r) &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

e o potencial efetivo

$$V(r) = V_{eff}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{3(M/r)^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-4} \right]. \quad (3.47)$$

Domínio de validade da perturbação

Antes de continuarmos com a análise do potencial (3.47) façamos algumas considerações sobre o seu domínio de validade.

Da transformação entre coordenadas de Minkowski e coordenadas curvas temos a métrica (3.7):

$$ds_M^2 = dt^2 - \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 dr^2 - \alpha r^2 d\Omega^2, \quad (3.48)$$

cujos domínios são $r > 2M$, uma vez que α é imaginário para $r < 2M$.

Tanto a forma covariante da métrica quanto a forma contravariante não podem apresentar divergências. Então, da componente η_{rr}

$$\alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{1 - \frac{3M}{r}}{1 - \frac{2M}{r}} \right)^2 \quad (3.49)$$

temos que r deve ser maior que $2M$ e maior que $3M$. Ou seja, as perturbações a seguir só são válidas para $r > 3M$.

Analisemos as possíveis órbitas de uma partícula não massiva de spin zero ao redor de uma distribuição de matéria e energia no vácuo a partir do potencial efetivo (3.47). Da figura (3.1) e da equação (3.47) podemos concluir que o potencial é imaginário para

$2M < r < 3M$ e $r < 2M$, ou seja, uma vez que a partícula entre na superfície $r = 3M$ ela segue em direção ao centro $r = 0$. Se considerarmos que a solução de Schwarzschild (também válida na GSG) apresenta um horizonte de eventos em $r = 2M$, é razoável supor a GSG tem dois horizontes de eventos, um em $r = 2M$ e outro em $r = 3M$. Entretanto, por conta do domínio de validade das perturbações, não discutiremos a região $2M < r < 3M$.

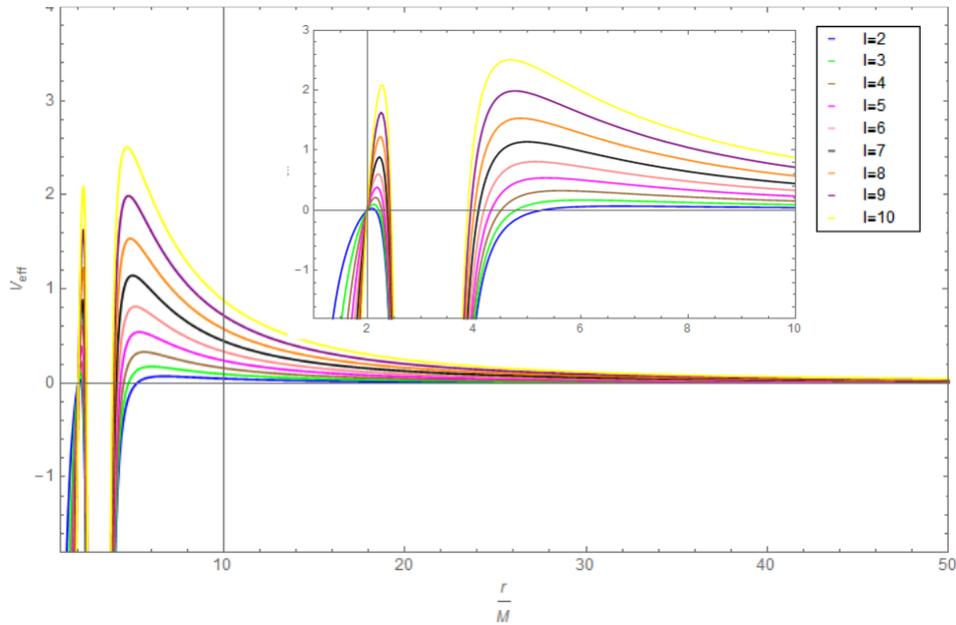


FIGURA 3.1: Potencial efetivo da órbita de uma partícula massiva na GSG.

Para encontrar as órbitas circulares devemos tomar $dV_{eff}/dr = 0$. No caso da GSG chegamos a uma equação de sexta ordem em r ,

$$L(r - 3M)^6 - r(r - 2M)(r^2 - 3rM + 3M^2) = 0, \quad (3.50)$$

onde $L \equiv l(l + 1)$.

Note que para l muito grande o primeiro termo domina e a derivada do potencial converge para a superfície $r = 3M$. E do gráfico (3.1) podemos concluir que existem órbitas instáveis dependentes do momento angular da partícula convergindo para a superfície $r = 3M$. É interessante observar que para a RG essas órbitas não variam com l tendo valor fixo de $r = 3M$. Como a equação (3.50) é séxtica não podemos concluir se é ou não possível sua fatoração em radicais. Recomendamos um estudo mais detalhado dessa função afim de obter expressões exatas para as órbitas.

Quando $L \gg M/r$ a equação do potencial efetivo recai no caso Newtoniano, como esperado. Então podemos inferir $r_c^{max} = \frac{L^2}{M}$ (órbita estável Newtoniana) e $r_c^{min} \rightarrow 3M$, esse último variando com l .

Pelo gráfico (3.1) podemos observar que existe um L_{lim} tal que para $L < L_{lim}$ o potencial efetivo não apresenta extremos. Uma partícula não massiva, seguindo em direção a $r = 0$, passará pela superfície $r = 3M$ e continuará até alcançar $r = 0$ (senão ficar presa na superfície $r = 2M$). Veja gráfico (3.2). Se, entretanto, $L > L_{lim}$ o potencial efetivo apresenta dois extremos: r_+ correspondendo a órbita circular estável (no poço potencial) e r_- equivalente a órbita circular instável (no topo da “colina” potencial), que podem ser visualizadas no gráfico (3.3). Podemos garantir a existência do extremo r_+ porque, quando tomamos o limite de campo fraco, o problema pode ser tratado através da gravitação Newtoniana, cujo estudo de estabilidade é bem conhecido e, claro está, possui órbitas circulares estáveis.

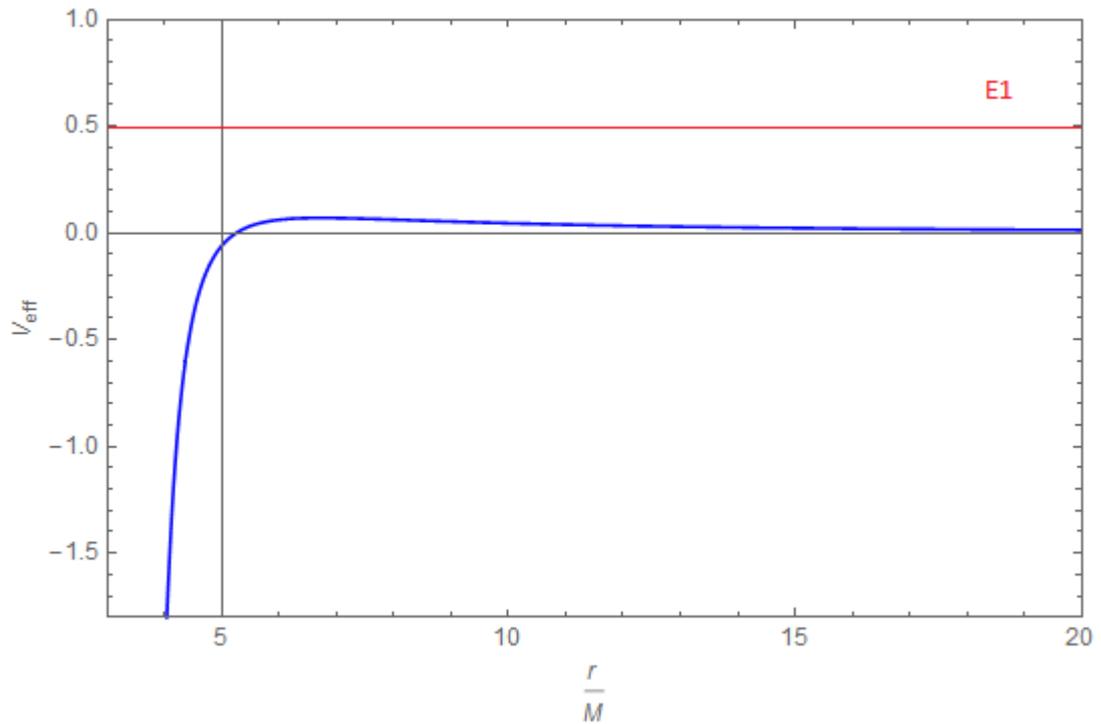


FIGURA 3.2: Potencial efetivo da órbita de uma partícula massiva na GSG para $L = 6$, caso $L < L_{lim}$. Uma partícula com energia $E1$ vindo do infinito passa pela barreira de potencial e continua em direção a $r = 0$.

Definimos r_{min} como a órbita mínima calculada para o caso $r_+ = r_-$. Temos, assim, a região com órbitas instáveis para $3M \lesssim r_- < r_{min}$, concluindo, portanto, que não existem órbitas circulares para $r < 3M$.

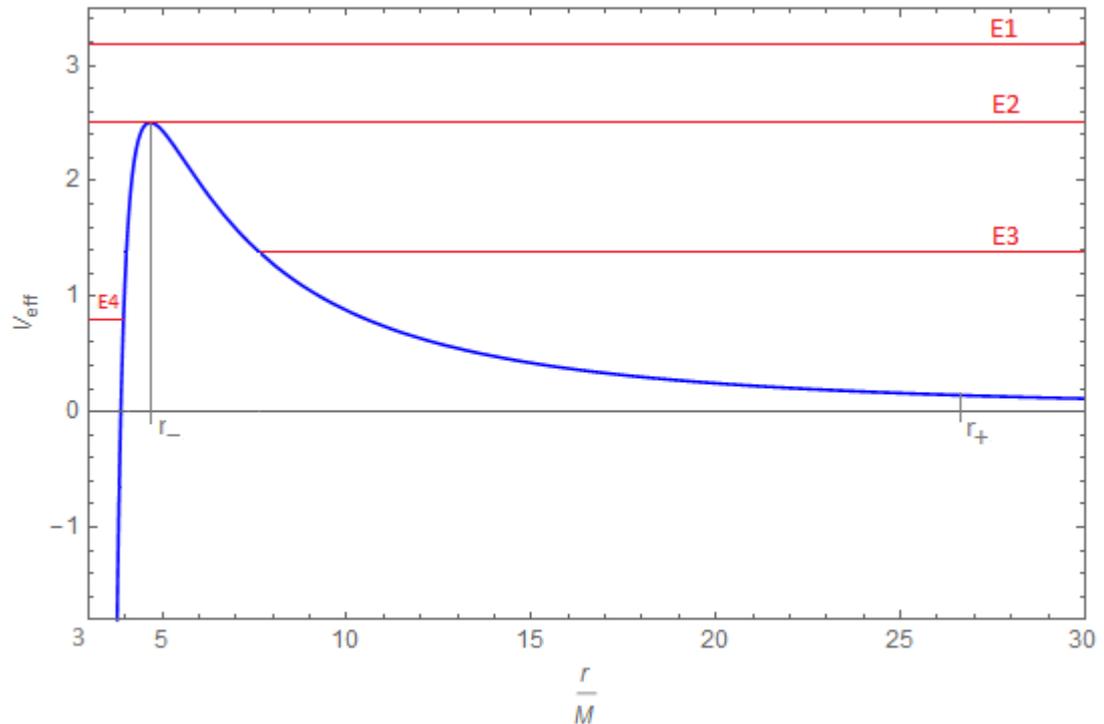


FIGURA 3.3: Potencial efetivo da órbita de uma partícula massiva na GSG para $L = 110$, caso $L > L_{lim}$. Uma partícula com energia $E1$ vindo do infinito passa pela barreira de potencial e continua em direção a $r = 0$ (senão ficar presa na superfície $r = 2M$). Se a partícula tiver energia $E2$, ela ficará presa em uma órbita circular de raio $r = r_-$ em torno da fonte gravitacional. Já no caso da partícula ter energia $E3$, ela “bate” na barreira de potencial e volta na direção de $r \rightarrow \infty$. Por fim, uma partícula não massiva com energia $E4$ e $3M < r < r_-$ ficará presa nessa região.

Do modo geral, podemos analisar as perturbações lineares das órbitas da GSG qualitativamente como fazemos com a RG. Entretanto vale ressaltar algumas diferenças:

- a superfície de equilíbrio instável na GSG tende a $r = 3M$ e varia com o momento angular da partícula. Enquanto para a RG temos o valor fixo para $r = 3M$;
- a GSG possui dois horizontes de eventos em $r = 2M$ e $r = 3M$, enquanto a RG tem apenas uma em $r = 2M$.

Por fim, a GSG propõe as seguintes questões: da mesma forma que $r = 2M$ é uma divergência do sistema de coordenadas, $r = 3M$ também é. Como será o buraco negro de Schwarzschild na GSG? Podemos concluir que teremos uma estrutura com dois horizontes de eventos? Pelo gráfico (3.1) concluímos que quando uma partícula não massiva passa pela superfície $r = 3M$ nunca alcança $r = 0$, pois é capturada pela superfície $r = 2M$ e a descontinuidade do potencial não a permite continuar. Em contrapartida, a região $2M < r < 3M$ aparenta ter um efeito de gravitação repulsiva. Note que na

superfície $r = 3M$ os invariantes de Debever não apresentam divergências. Isso pode ser concluído a partir de cálculo direto ou do conhecimento prévio que temos da métrica de Schwarzschild na RG: uma vez que a métrica é a mesma nos dois casos, teremos os mesmos invariantes. Para a RG, $r = 3M$ é superfície de equilíbrio instável, e todas as quantidades associadas a mesma são finitas. Quais outras informações podemos obter sobre essas configurações com dois horizontes? Será que a representação do buraco negro em outros sistemas de coordenadas pode trazer mais conhecimento sobre o comportamento das partículas entre essas superfícies? Essas indagações sobre buracos negros serão abordadas em trabalhos futuros.

3.3 Estrelas Newtonianas

A maioria das estrelas, em torno de 90%, podem ser descritas através da gravitação Newtoniana, conhecidas como estrelas da sequência principal do diagrama de Hertzsprung-Russell (diagrama HR) – veja figura 3.4.

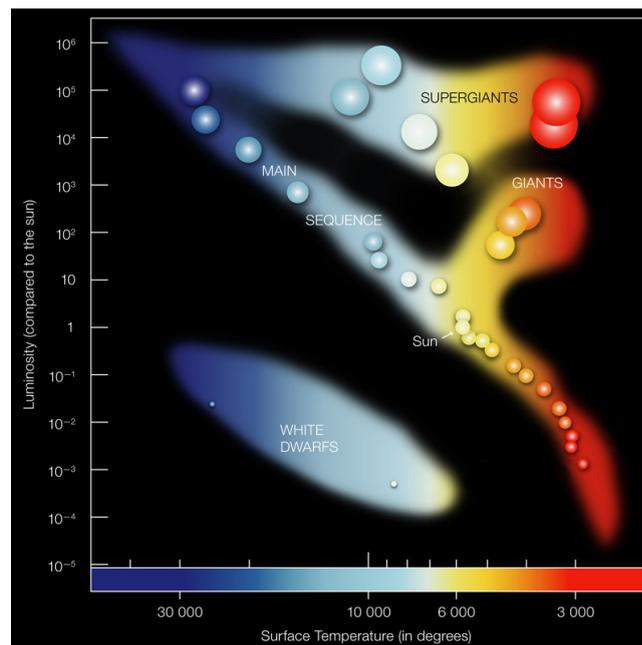


FIGURA 3.4: O diagrama HR é um gráfico de dispersão de estrelas – representando a magnitude absoluta estelar ou luminosidade em função da temperatura de superfície ou classificação estelar. Os estágios da evolução estelar ocupam regiões específicas no diagrama HR e exibem propriedades semelhantes. Uma classe de estrelas – as variáveis pulsantes que incluem Cefeidas, RR Lyraes, Semiregulares e Miras – ocupam regiões de instabilidade no diagrama HR e representam períodos de transição entre os estágios de evolução.

Fonte: <http://chandra.harvard.edu/>

As estrelas Newtonianas descrevem a maior parte da vida das estrelas durante o período de equilíbrio hidrostático entre a força gravitacional, que tenta compactar a matéria, e a pressão térmica gerada pela queima de combustível nuclear, que tenta expandí-la. Quando esse combustível esgota-se, a estrela entra em colapso e passa por vários estágios de instabilidade até apresentar sua derradeira fase remanescente que, dependendo da sua massa, pode ser uma nova configuração de equilíbrio, como uma anã branca (estrela original com massa entre 0.08 a 10 massas solares) ou uma estrela de nêutrons (estrela original com massa maior que 10 massas solares), ou ainda uma configuração instável, eternamente em colapso, conhecida como buraco negro.

Em todo o caso, as estrelas Newtonianas são o caso limite que toda a teoria da gravitação deve satisfazer, além de serem um guia para o estudo das propriedades de objetos mais exóticos. Devido à sua importância, apresentaremos a seguir a descrição que a GSG oferece à evolução das estrelas da sequência principal.

Vamos examinar o caso limite de campo fraco para a GSG. Nós sabemos que a equação que governa o comportamento de fluido perfeito no escopo da gravitação Newtoniana é dada pela equação de Chandrasekhar [35]

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{m(r)\rho}{r^2}. \quad (3.51)$$

O limite de campo fraco na GSG implica em

$$\begin{aligned} p &\ll \rho, \\ \alpha \rightarrow 1 &\Rightarrow V \rightarrow 1, \\ B \rightarrow 1 &\Rightarrow \Sigma^2 \rightarrow 1, \end{aligned} \quad (3.52)$$

com as funções α , B , V , Σ^2 definidas nas equações (3.8) a (3.12).

Se tomarmos o limite do campo escalar para campo fraco, de acordo com o capítulo 2, temos que $\Phi \rightarrow \Phi_N$, sendo esse último o campo potencial Newtoniano. Portanto, a equação dinâmica (3.11) toma a forma

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{k}{2}\rho, \quad (3.53)$$

em coordenadas esféricas

$$\frac{dF(r)}{dr} = -\frac{k}{2}\rho r^2, \quad (3.54)$$

onde a função $F(r)$ é definida como $F(r) \equiv r^2 \frac{d\Phi}{dr}$.

Diferentemente da RG,³ a equação (3.54) é válida somente para a classe de soluções Newtonianas da GSG. Essa equação aplica-se às distribuições de matéria e energia no limite fraco, não tendo nenhuma generalidade. Substituindo a última equação em (3.16) obtemos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho F(r)}{r^2}, \quad (3.55)$$

a qual é análoga à equação de Chandrasekhar (3.51) com $F(r)$ descrevendo a massa gravitacional $m(r)$.

Assim concluímos que os resultados correspondentes às estrelas Newtonianas só serão válidos na GSG se a massa das estrelas for equivalente a

$$F(r) = r^2 \frac{d\Phi}{dr}. \quad (3.56)$$

Faz-se necessário um estudo mais aprofundado da interpretação física desse resultado em comparação com o trabalho sobre energia gravitacional na GSG [34] e também com relação a sua estabilidade. Contudo, como no limite Newtoniano, ao qual essa equação refere-se, a massa gravitacional pode ser de fato descrita pela equação (3.56) e podemos acordar que a GSG oferece uma descrição para estrelas Newtonianas em conformidade com os dados observacionais.

3.4 Equações análogas às equações Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Conforme mencionado na introdução 1, a época de ouro da RG [1] começou na década de 1960, com inúmeros estudos sobre condições extremas para estrelas e outros objetos compactos como buracos negros, estrelas de nêutrons, pulsares, quasares, etc. Todos esses trabalhos em astrofísica relativística são baseados em dois artigos pioneiros publicados em sequência na *Physical Review* de fevereiro de 1939.

O primeiro, de autoria de Richard Tolman [36], consiste na construção de um sistema de equações para resolver analiticamente o problema estático de simetria esférica da RG. Como resultado, Tolman apresenta oito soluções internas, sendo três delas o universo de Einstein, a solução Schwarzschild-de Sitter e a solução interna de Schwarzschild. A seguir, caracteriza as condições de contorno entre essas soluções e a métrica de Schwarzschild, que descreve o espaço vazio ao redor da distribuição esférica de matéria. E, por fim, analisa mais profundamente três dessas estruturas decorrentes das condições de junção.

³Veja o apêndice B.

O trabalho seguinte, de Oppenheimer e Volkoff [37], propõe uma modelagem para estrelas de nêutrons supondo que a fonte da gravitação é um gás de Fermi ideal [38] compreendido numa hipersfera estática esfericamente simétrica, cuja dinâmica é dada pela RG. Em consequência, e usando os resultados precedentes de Tolman, eles foram capazes de obter numericamente uma previsão teórica para a massa crítica das estrelas de nêutrons e investigar a sua estabilidade. Referimo-nos ao conjunto de equações que descrevem o problema estático esfericamente simétrico da RG como equações Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

Essa seção é dedicada a estabelecer e explorar as consequências das equações tipo-TOV para a GSG.

É conveniente reescrever a equação (3.15) em termos de apenas três funções: a função $\mu(r)$, a pressão isotrópica p e a densidade de energia ρ . Ao fazê-lo obtemos

$$\frac{1}{H(r)r^2}(1-\sigma)^{1/2}\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)^2\frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{H(r)}\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)\frac{d\sigma}{dr}\right] = -k\left[p(1-3\sigma)\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)^{-1} - \rho\right], \quad (3.57)$$

onde $H(r) \equiv 1 - \sigma + (r/2)d\sigma/dr$ e σ é definido como $\sigma(r) \equiv 2\mu(r)/r$ e, portanto, $\alpha = (1 - \sigma)^{-1}$. Se reescrevemos a equação (3.16) em função de σ temos

$$\frac{dp}{dr} = \frac{1}{2}(\rho + p)(1 - \sigma)^{-1}\frac{d\sigma}{dr}. \quad (3.58)$$

Equações (3.57) e (3.58) juntamente com a equação de estado $p = p(\rho)$ formam o sistema de equações responsáveis por descrever a dinâmica das soluções estáticas esfericamente simétricas de um fluido perfeito na GSG (TOV-GSG).

Por outro lado, se quisermos comparar visualmente as TOV-GSG com as TOV da RG, tomamos as equações (B.5) e (B.7):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{rg}}{dr} &= r\rho - \frac{\sigma_{rg}}{r}, \\ \frac{dp}{dr} &= -(\rho + p)(1 - \sigma_{rg})^{-1}\left(pr + \frac{\sigma_{rg}}{2r}\right), \\ p &= p(\rho), \end{aligned} \quad (3.59)$$

para a qual definimos $\sigma_{rg}(r) \equiv 2m(r)/r$, a título de facilitar a comparação.

Para escrever $d\sigma/dr$ em termos de p , ρ e σ tomamos a equação (3.58) e a substituímos na equação (3.57)

$$\begin{aligned} \frac{2}{H(r)r^2}(1-\sigma)^{1/2}\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)^2 \frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{H(r)}(\rho+p)^1(1-\sigma)\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)\frac{dp}{dr}\right] &= \\ &= -k\left[p(1-3\sigma)\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)^{-1}-\rho\right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Fica claro pela representação da equação (3.60) que as TOV-GSG são equações diferenciais não-lineares de segunda ordem, enquanto as suas equivalentes na RG são de primeira ordem. Além disso, recordamos que as soluções requerem atenção sobre os duas superfícies de aprisionamento em $r = 2M$ e $r = 3M$.

3.4.1 Soluções analíticas para TOV-GSG

É conveniente reescrever as equações (3.57) e (3.58) numa configuração de integrais que permita resolver o sistema analiticamente a partir da escolha de uma função *ansatz* que satisfaça os critérios de integrabilidade do sistema. O mesmo método foi realizado por Tolman [36] resultando em oito soluções exatas para RG, sendo apenas três delas consideradas de interesse astrofísico, ou seja, com densidade de energia positiva e pressão isotrópica ambas decrescentes com r .

O método foi concebido através da aplicação de uma série de redefinições às equações (3.57) e (3.58) sendo que nesta primeira abordagem não consideramos a equação de estado, assim como no procedimento de Tolman.

A equação dinâmica (3.57) pode ser reescrita da forma

$$\rho(r) = D(r) - Q(r)p(r), \quad (3.61)$$

para a qual definimos as funções

$$\begin{aligned} kD(r) &\equiv \frac{1}{H(r)r^2}(1-\sigma)^{1/2}\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)^2 \frac{d}{dr}\left[\frac{r^2}{H(r)}\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)\frac{d\sigma}{dr}\right], \\ Q(r) &\equiv (1-3\sigma)\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

lembrando que

$$H(r) \equiv 1 - \sigma + \frac{r}{2} \frac{d\sigma}{dr}. \quad (3.63)$$

Já a equação de conservação de energia (3.58) é reescrita como

$$\frac{dp}{dr} + X(r)p(r) = Y(r), \quad (3.64)$$

com

$$\begin{aligned} X(r) &\equiv \frac{1}{2}(1-\sigma)^{-1} \left(Q(r) - 1 \right) \frac{d\sigma}{dr}, \\ Y(r) &\equiv \frac{1}{2}(1-\sigma)^{-1} D(r) \frac{d\sigma}{dr}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ao substituir a expressão para a função $Q(r)$ em $X(r)$ tornamos essa última integrável. De forma que podemos reescrever $X(r)$ como

$$X(r) = \frac{d}{dr} \ln \left[2(1-\sigma)^{-3/2} \left(1 - \frac{3\sigma}{2} \right) \right], \quad (3.66)$$

e ao empregarmos esse resultado na equação (3.64) obtemos

$$p(r) = \frac{1}{2} (1-\sigma)^{3/2} \left(1 - \frac{3\sigma}{2} \right)^{-1} [Z(r) + Z_0], \quad (3.67)$$

onde

$$Z(r) \equiv \int 2(1-\sigma)^{-3/2} \left(1 - \frac{3\sigma}{2} \right) Y(r) dr \quad (3.68)$$

e Z_0 é constante de integração com as mesmas dimensões da pressão. A função $Z(r)$ pode ser escrita como

$$Z(r) = \frac{1}{2k} \int \frac{1}{r^4} (1-\sigma)^{-2} \left(1 - \frac{3\sigma}{2} \right)^2 \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{H(r)} \left(1 - \frac{3\sigma}{2} \right) \frac{d\sigma}{dr} \right]^2 dr. \quad (3.69)$$

As soluções exatas da GSG podem ser obtidas através da escolha de funções *ansatz* que tornem a equação (3.69) integrável. Vale ressaltar que soluções integráveis não implicam, necessariamente, em soluções físicas. Entretanto, nesta seção, tratamos apenas de soluções integráveis. Voltaremos às hipóteses sobre a obtenção soluções físicas nas próximas seções.

3.4.1.1 Exemplo

Vamos estudar as consequências do seguinte *ansatz*

$$\frac{1}{r^4} (1-\sigma)^{-2} \left(1 - \frac{3\sigma}{2} \right)^2 = C_a^{-2}, \quad (3.70)$$

sendo C_a uma constante com dimensões iguais a comprimento ao quadrado, $[C_a] = [L]^2$.

Obtemos duas soluções para σ :

$$\sigma_{\pm} = \frac{C_a \pm r^2}{\frac{3}{2}C_a - r^2}. \quad (3.71)$$

Para a solução σ_+ as funções da métrica (3.8) são

$$\begin{aligned} \alpha_+(r) &= \frac{\frac{3}{2}C_a - r^2}{\frac{C_a}{2} - 2r^2}, \\ B_+(r) &= \frac{1}{25r^4} (8r^4 - 4C_a r^2 + 3C_a^2)^2 (3C_a - 2r^2)^{-1} (C_a - 4r^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

e a densidade de energia e pressão isotrópica são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \rho_+(r) &= \frac{1}{50kr^4} (C_a - 4r^2)^{1/2} (286720 C_a^2 Z_0 k r^{18} - 65536 C_a Z_0 k r^{20} \\ &\quad - 522240 C_a^3 Z_0 k r^{16} + 573440 C_a^4 Z_0 k r^{14} - 431360 C_a^5 Z_0 k r^{12} - 204800 r^{19} \\ &\quad + 202368 C_a^6 Z_0 k r^{18} - 2000000 C_a^2 r^{16} + 486400 C_a r^{17} - 53280 C_a^7 Z_0 k r^8 \\ &\quad - 4000000 C_a^3 r^{14} - 4428800 C_a^2 r^{14} - 8640 C_a^8 Z_0 k r^6 + 6750000 C_a^4 r^{12} \\ &\quad + 272000 C_a^3 r^{13} + 11340 C_a^9 Z_0 k r^4 - 5625000 C_a^5 r^{10} - 48000 C_a^4 r^{11} \\ &\quad - 10800 C_a^5 r^9 + 729 C_a^{11} Z_0 k + 18900 C_a^6 r^7 - 4050 C_a^7 r^5 - 4860 C_a^{11} Z_0 k r^2) \\ &\quad (3C_a - 2r^2)^{-5/2} (8r^4 - 4C_a r^2 + 3C_a^2)^{-3}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} p_+(r) &= -\frac{1}{10 C_a k r^2} (C_a - 4r^2)^{3/2} (32 C_a^2 Z_0 k r^4 - 16 C_a Z_0 k r^6 - 18 C_a^3 Z_0 k r^2 \\ &\quad + 9 C_a^4 Z_0 k - 50 r^5 (3C_a - 2r^2)^{-3/2} (8r^4 - 4C_a r^2 + 3C_a^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Utilizamos $k = 8\pi G/c^4$ em unidades naturais, ou seja, $c = G = 1$. E multiplicamos os lados direitos das equações (3.73) e (3.74) por 8π e 4π , respectivamente, afim de manter a coerência do sistema de unidades para a densidade de energia e pressão isotrópica. Trataremos de maneira equivalente as equações (3.76) e (3.77) que geram o gráfico (3.6) do próximo exemplo.

Conforme a figura (3.5), na região $r > 3M$, a densidade de energia cai rapidamente com r e a pressão isotrópica mantém-se e praticamente nula no interior do objeto. A solução, portanto, não satisfaz os requerimentos para descrição da solução interna de uma estrela, uma vez que esperaríamos duas funções caindo monotonamente conforme r aumenta.

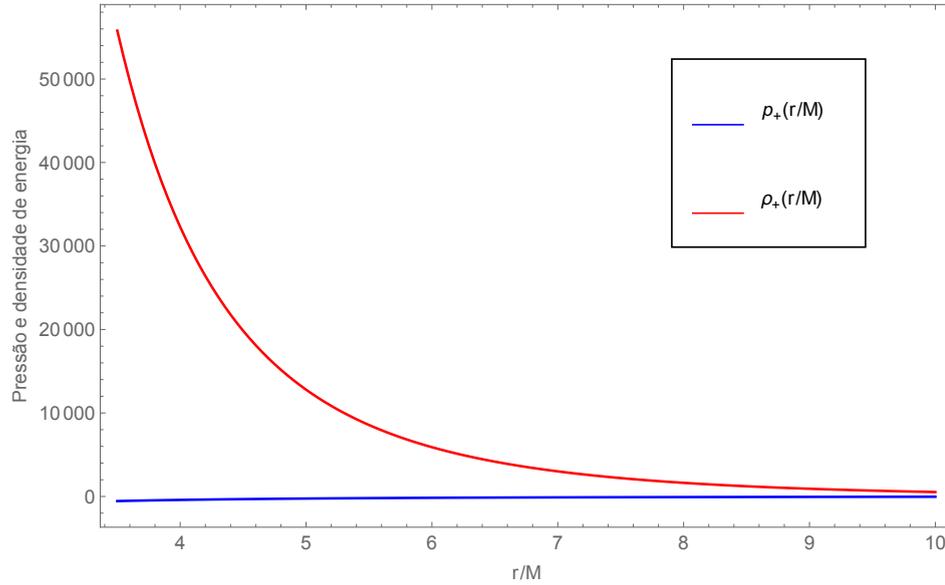


FIGURA 3.5: Densidade de energia e pressão isotrópica para σ_+ . Escolhemos $k = 8\pi$ (sistema natural de unidades), $Z_0 = 10[M][L]^{-1}[T]^{-2}$, $C_1 = 1000[L]^2$ e fizemos $M = 1$.

Tomemos agora a solução σ_- . As funções da métrica (3.8) são

$$\begin{aligned} \alpha_-(r) &= \frac{3C_a - 2r^2}{C_a}, \\ B_-(r) &= \frac{C_a}{r^4} (3C_a - 4r^2)^2 (3C_a - 2r^4)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

E a densidade de energia e pressão isotrópica são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \rho_-(r) &= \left(\frac{1}{2C_a^{1/2}kr^4} \right) (3C_a - 4r^2)^3 (1024C_a^2Z_0kr^{12} - 6144C_a^3Z_0kr^{10} \\ &\quad + 14976C_a^4Z_0kr^8 - 64r^{14} - 19008C_a^5Z_0kr^6 + 432C_a r^{12} \\ &\quad - 256r^{13} + 13284C_a^6Z_0kr^4 - 360C_a^2r^{16} + 960C_a r^{11} - 4860C_a^7Z_0kr^2 \\ &\quad - 1296C_a^2r^9 + 729C_a^8Z_0k + 756C_a^3r^7 - 162C_a^4r^5) (3C_a - 2r^2)^{-5/2}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} p_-(r) &= \frac{1}{2C_a^{1/2}kr^2} (3C_a - 4r^2)^{-1} (8C_a^2Z_0kr^4 - 18C_a^3Z_0kr^2 + 9C_a^4Z_0k - 2r^5) \\ &\quad (3C_a - 2r^2)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Da mesma forma que no gráfico (3.5), a figura (3.6), na região $r > 3M$, apresenta rápida queda de densidade de energia com r e a pressão isotrópica nula no interior do objeto.

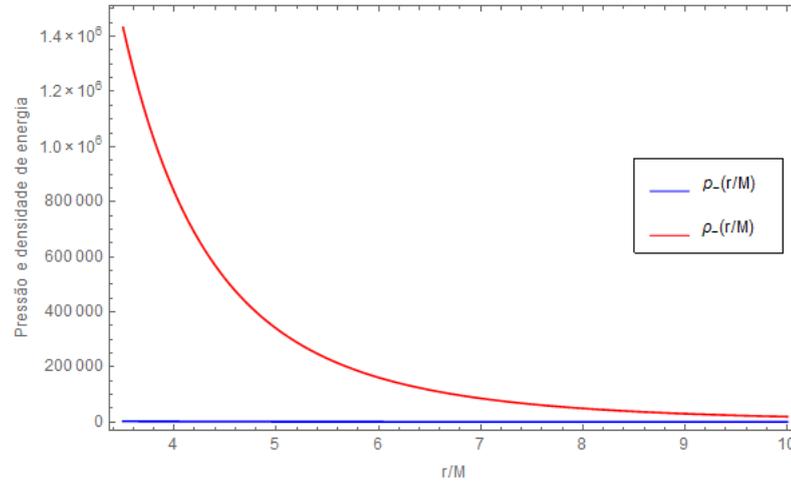


FIGURA 3.6: Densidade de energia e pressão isotrópica para σ_- . Escolhemos $k = 8\pi$ (sistema natural de unidades), $Z_0 = 10[M][L]^{-1}[T]^{-2}$, $C_1 = 1000[L]^2$ e fizemos $M = 1$.

Essa solução, em consequência, também não pode ser utilizada na descrição do interior estelar.

Outros *ansatzs* foram estudados durante o período de elaboração desta tese. Entretanto, nenhum desses constituiu uma representação de acordo com as hipóteses usuais para o interior estelar. O resultado apresentado nesta seção tem por objetivo apenas ilustrar a utilização do método de funções integráveis.

3.5 Condições de contorno

Para o caso das estrelas descritas por fluidos perfeitos as condições de contorno impõem que a pressão isotrópica, o campo Φ e sua primeira derivada sejam contínuos através da superfície $r = R$. Esquemáticamente

$$\begin{aligned} p_{\text{int}}(R) &= p_{\text{ext}}(R), \\ \Phi_{\text{int}}(R) &= \Phi_{\text{ext}}(R), \\ \frac{d\Phi_{\text{int}}(R)}{dr} &= \frac{d\Phi_{\text{ext}}(R)}{dr}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

As etiquetas *int* e *ext* referem-se às métricas interna e externa para as quais as quantidades são calculadas.

Pela definição da função métrica $\alpha = e^{-2\Phi}$ e pela definição da função σ , $\alpha = (1 - \sigma)^{-1}$, temos que a continuidade de Φ pode ser expressa em termos de σ tal que

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{int}}(R) &= \sigma_{\text{ext}}(R), \\ \frac{d\sigma_{\text{int}}(R)}{dr} &= \frac{d\sigma_{\text{ext}}(R)}{dr}.\end{aligned}\tag{3.79}$$

No caso da estrela embebida no espaço vazio, $p_{\text{ext}}(r) = \rho_{\text{ext}}(r) = 0$, a geometria exterior é descrita pela métrica de Schwarzschild. Podemos reescrever as condições de contorno como

$$\begin{aligned}p_{\text{int}}(R) &= 0, \\ \sigma_{\text{int}}(R) &= \frac{2M}{R}, \\ \frac{d\sigma_{\text{int}}(R)}{dr} &= -\frac{2M}{R^2}.\end{aligned}\tag{3.80}$$

Podemos ainda definir o sinal da função $\sigma(r)$ dentro da estrela. Assumindo que a componente g^{tt} da métrica não mude de sinal, α sempre positivo, e pela definição $\alpha = (1 - \sigma)^{-1}$, temos que $\sigma(r) < 1$ em todo o domínio. Como conhecemos o valor $\sigma(R) = 2M/R$ e $0 < 2M/R < 1$ concluímos que existem duas possibilidades

- (1) $\sigma_c \leq \sigma(r) \leq 2M/R$, com $\sigma_c > 0$, ou seja, $\sigma(r)$ é sempre positivo;
- (2) $\sigma_c \leq \sigma(r) \leq 2M/R$, com $\sigma_c < 0$, ou seja, $\sigma(r)$ muda de sinal,

sendo σ_c o valor de $\sigma(r)$ quando $r = 0$. Se a segunda opção é válida então existe $r = r^*$ dentro da estrela para o qual $\sigma(r^*) = 0$.

3.6 Soluções com densidade de energia constante

A classe de estrelas estáveis constituídas por fluidos incompressíveis com equação de estado

$$\rho = \text{constante}$$

tem um grande interesse em RG. Afora oferecerem uma solução exata para as equações de Einstein, elas definem o limite inferior $R/M = 9/4$ abaixo do qual não podem existir soluções esfericamente simétricas de matéria ([39] e [40]) e também o limite superior $1 + z = 3$ para o desvio para o vermelho estelar ([41] e referências nele contidas).

Em 1916, Schwarzschild [39] estudou uma solução de fluido perfeito com simetria esférica, e equação de estado com densidade de energia constante, no vácuo, cuja métrica é dada

pela solução estática esfericamente simétrica que leva o seu nome. Ele mostrou que para $R = 9M/4$ a pressão central da estrela diverge e para valores menores não há configuração estável e a estrela colapsa. Posteriormente, Volkoff [42] demonstrou que era possível obter o mesmo limite diretamente das equações TOV, conhecido como *limite de Schwarzschild*.

O interesse por estrelas com densidade de energia constante, entretanto, supera seus aspectos históricos. Notavelmente, uma densidade constante é atingida quando a compressão da matéria pode ser considerada desprezível. Isto acontece quando a velocidade das partículas massivas torna-se comparável com a velocidade da luz, ou seja, quando as temperaturas são da ordem da massa de repouso da partícula, no caso dos bósons, ou quando os níveis de Fermi são da mesma ordem da massa de repouso, para férmions. Isto significa que em ambos os casos as densidades aproximam-se de uma partícula por comprimento cúbico de Compton. É da equação de estado incompressível que conseguimos extrair informações sobre o limite de Schwarzschild que podem ser comparados com outros limites de compactidade.

Por exemplo, existe uma variedade de equações de estado para descrever o interior de objetos compactos. Oppenheimer e Volkoff obtiveram o limite superior para estrelas de nêutrons a partir da equação de estado (compressível) para o gás de Fermi ideal [37]. E, como esperado, as estrelas de nêutrons mais compactas não são tão compactas como o limite de Schwarzschild permite.

Para aprofundar ainda mais a compreensão sobre tais limites, Buchdahl [40] provou que, sob certas condições, uma distribuição de matéria esfericamente simétrica só pode existir para configurações cujo raio satisfaça a relação $R \geq 9M/4$. As hipóteses para garantir esse resultado são

- a densidade de energia é positiva e decrescente com r ;
- a pressão é isotrópica, positiva e satisfaz as condições de contorno da métrica de Schwarzschild.

O limite, conhecido como *limite de Buchdal*, tem o mesmo valor que o limite de Schwarzschild: $R \geq 9M/4$. Esse resultado também implica que estrelas com essas mesmas condições não podem alcançar o tamanho do seu horizonte de eventos $R = 2M$, eliminando superfícies de aprisionamento.

O fato de ambos os limites, de Schwarzschild e de Buchdahl, serem iguais significa que o primeiro (fluidos incompressíveis com pressão central infinita) é a extremização do segundo (fluidos perfeitos que obedecem as condições de Buchdahl).

Essa é a motivação para abordamos o problema de $\rho = \text{constante}$ na GSG: é possível determinar um limite análogo ao limite de Schwarzschild? Se sim, como ele se compara com as superfícies de aprisionamento $r = 2M$ e $r = 3M$?

Podemos fazer uma análise qualitativa para as equações de TOV-GSG com densidade de energia constante. Vamos assumir as seguintes hipóteses

- a densidade de energia é constante e decrescente com r ;
- a pressão é isotrópica, positiva e satisfaz as condições de contorno da métrica de Schwarzschild.

O resultado da equação de conservação de energia (3.58) para $\rho = \text{cte}$ é

$$p(r) = p_0 \left(1 - \sigma(r)\right)^{-1/2} - \rho. \quad (3.81)$$

Ao aplicar a condição de contorno (3.80) para a equação (3.81) obtemos o valor da constante p_0 :

$$p_0 = \frac{\rho}{(1 - \sigma_R)^{-1/2}}, \quad (3.82)$$

sendo σ_R o valor da função $\sigma(r)$ sobre a superfície $r = R$. Assim reescrevemos a equação para a pressão isotrópica

$$p(r) = \rho \left[\left(\frac{1 - \sigma_R}{1 - \sigma(r)} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (3.83)$$

Resgatemos o comentário sobre o sinal da função σ no final da seção anterior sobre condições de contorno. Suponha que a opção (2) seja válida, ou seja, que existe $r = r^*$ dentro da estrela para o qual $\sigma(r^*) = 0$. Nesse caso, de acordo com a equação (3.83)

$$p(r^*) = \rho \left[(1 - \sigma_R)^{-1/2} - 1 \right], \quad (3.84)$$

indicando que $p(r)$ é negativo na região $0 \leq r \leq r^*$. Dessa forma concluímos que a opção $\sigma_c \leq \sigma(r) \leq 2M/R$ não serve para descrever estrelas com densidade constante na GSG.

Nos resta, portanto, analisar a opção (1), ou seja, $\sigma_c \leq \sigma(r) \leq 2M/R$. Neste caso a função σ tem que ser crescente com r em toda a região $0 \leq r \leq R$ para qualquer solução com densidade de energia constante e pressão isotrópica positiva. Contudo, ao analisarmos a equação (3.83) para $\sigma(r) \geq 0$ temos que $p(r) \leq 0$ para todas as soluções que a GSG ofereça.

Concluimos, assim, que a combinação entre as condições de contorno (3.80) e as hipóteses para densidade de energia constante e decrescente com r e pressão isotrópica positiva, que satisfaça as condições de contorno da métrica de Schwarzschild, não é válida para a GSG. Todas as soluções geradas por essa combinação têm pressão isotrópica negativa.

Podemos exemplificar essa consequência resolvendo o sistema TOV-GSG no limite de campo fraco. Nesse caso, calculamos a solução aproximada pelo método iterativo quando $\Phi \ll 1$ e, portanto, $\sigma \ll 1$. Em ordem zero, a equação (3.58) resulta em $p \simeq p_1 - \rho$, com p_1 constante. Substituindo essa expressão para a pressão na equação dinâmica (3.57) no regime de campo fraco, temos

$$\sigma(r) \simeq \sigma_c - \frac{k}{6} (p_1 - 2\rho) r^2. \quad (3.85)$$

Ao substituirmos o resultado da equação (3.85) de volta na equação (3.58) obtemos a expressão para a pressão em primeira ordem:

$$p(r) = -\rho + C_p \left[1 - \sigma_c + \frac{k}{6} (p_1 - 2\rho) r^2 \right]^{-1/2} \quad (3.86)$$

que, após determinação da constante C_p ao impormos a condição de contorno $p(r = R) = 0$, apresenta a forma

$$p(r) = -\rho \left[1 + \left(\frac{1 - \sigma_c - \frac{k}{6} (p_1 - 2\rho) R^2}{1 - \sigma_c - \frac{k}{6} (p_1 - 2\rho) r^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.87)$$

Em conclusão, a pressão dada pela equação (3.87) é negativa. E por tratar-se de uma aproximação (grosseira) de campo fraco, ou seja, um limite que deveria ser a princípio facilmente satisfeito, concluimos que a GSG não apresenta solução para estrelas com densidade de energia constante e, por conseguinte, não podemos inferir nenhum dos resultados análogos ao limite de Schwarzschild, pelo menos não através desse modelo.

Métodos numéricos preliminares elaborados para a GSG encontraram algumas soluções, porém nenhuma satisfaz as hipóteses de Buchdal. Uma das perspectivas futuras de pesquisa é estabelecer o que seriam as hipóteses da GSG para interiores estelares, além de desenvolver métodos numéricos mais apropriados ao caso da GSG na tentativa de obter soluções que tratem de fenômenos observáveis. Discutiremos um pouco mais sobre isso nas considerações finais deste trabalho.

Capítulo 4

Estrela na teoria geométrico-escalar da gravitação

Contribuição original da candidata

Vamos discutir um modelo estelar com uma fonte esférica, sendo o campo escalar Φ constante, embebida em uma distribuição de matéria e energia em estado inerte, cuja geometria é descrita pela métrica de Schwarzschild. Ao compararmos as equação de estado da fonte com fluidos perfeitos usuais obtemos uma estrela compacta e sem pressão. O fluido não apresenta estado inerte nesse caso.

4.1 Solução de Schwarzschild no espaço-tempo não vazio

Suponhamos que exista um estado para o qual a distribuição de matéria e energia satisfaça a equação (3.17). Nesse caso, temos que a solução da TOV-GSG continua sendo a métrica de Schwarzschild, no espaço não vazio. Pelo fato do fluido nesse estado não contribuir com o campo Φ o chamaremos de *estado inerte*. Tomando as equações (3.16), (3.17) e (3.23) encontramos as seguintes expressões para a densidade de energia e a pressão isotrópica deste fluido, para a região $r > r_H$,

$$\rho_{inerte} = \rho_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{6M}{r}\right), \quad (4.1)$$

e

$$p_{inerte} = \rho_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{3M}{r}\right), \quad (4.2)$$

sendo ρ_0 a densidade de energia no centro do objeto ($r = 0$).

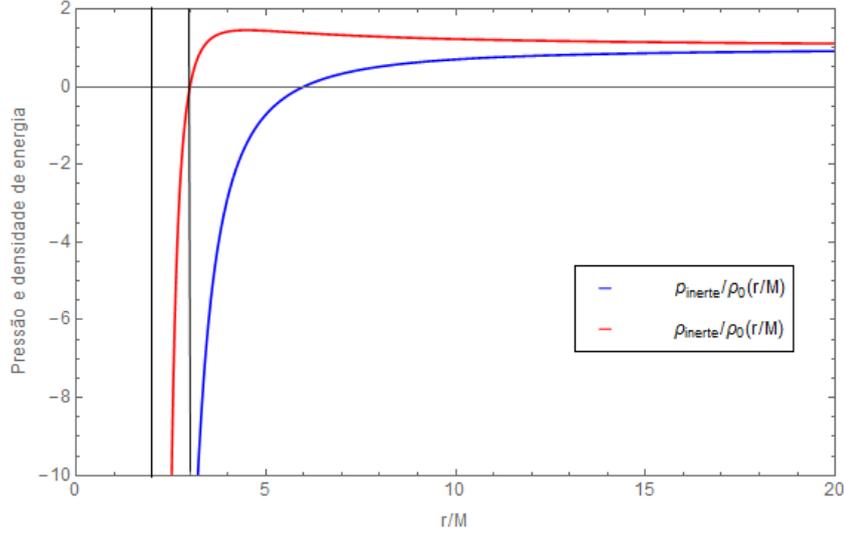


FIGURA 4.1: Densidade de energia e pressão isotrópica para um fluido em estado inerte preenchendo espaço-tempo descrito pela métrica de Schwarzschild, onde ρ_0 é a densidade de energia no centro da estrela. Ambas as funções divergem para $r = 2M$.

Se tomarmos os limites das expressões (4.1), (4.2) e consultando visualmente o gráfico (4.1) concluímos que a pressão é negativa para $r < 3/2 r_H$, crescendo de $r = 0$ até atingir o valor máximo de $\sim 1,45 \rho_0$ para $r = 9/4 r_H$. A densidade de energia apresenta o mesmo comportamento: é negativa para $r < 3 r_H$, até tornar-se nula em $r = 3 r_H$. Conforme r cresce ambas as expressões (4.1) e (4.2) decrescem rapidamente e seus valores tendem a constante ρ_0 , o que significa que a solução não é assintoticamente plana a menos que $\rho_0 = 0$.

É fácil ver que se uma distribuição de matéria e energia esférica está envolvida por esse fluido em estado inerte, essa camada de matéria deve estar conectada com a solução de Schwarzschild no espaço vazio, a fim de satisfazer o limite assintótico.

4.2 Métrica constante

Consideremos um outro caso. Tomamos a equação (3.16) e assumimos $dp/dr = 0$, ou seja, escolhemos uma configuração com densidade de energia e pressão uniformemente distribuídas. Resolvendo a equação (3.15) obtemos a métrica

$$ds^2 = (1 - \Sigma) dt^2 - \frac{(1 - \Sigma)}{(1 - \frac{3}{2}\Sigma)^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.3)$$

onde $\Sigma \equiv 1/\alpha$. Não confundir com Σ definido no capítulo 3, equação (3.10). Todos os Σ mencionados no presente capítulo são $\Sigma \equiv 1/\alpha$.

A equação (4.3) representa a métrica gerada por um campo escalar uniforme em toda o espaço. Para vislumbrar o tipo de efeito gravitacional que essa métrica gera, vamos assumir que a fonte seja um fluido perfeito ($p = \lambda\rho$). Assim, obtemos a expressão, representada na figura (4.2),

$$\Sigma = \frac{1}{3} \frac{4\lambda - 1}{2\lambda - 1}. \quad (4.4)$$

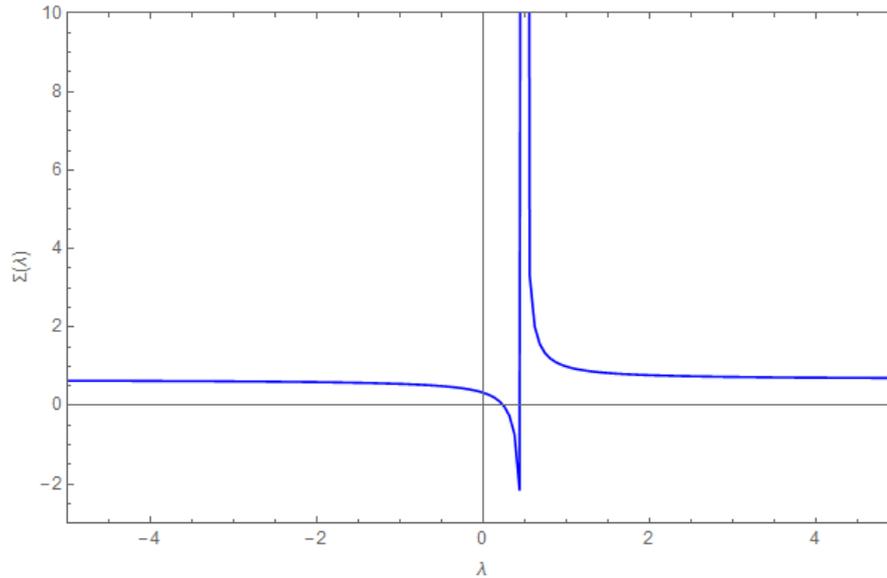


FIGURA 4.2: Parâmetro Σ da equação (4.3) como função do número adimensional λ da equação de estado $p = \lambda\rho$.

4.2.1 Considerações sobre a dinâmica da métrica constante

Por conta da estrutura da métrica (4.3) pode parecer que a mesma não seja nada além da métrica de Minkowski a menos de uma transformação de coordenadas. Este não é o caso. As componentes não nulas do tensor de Ricci são

$$R_{\theta}^{\theta} = R_{\phi}^{\phi} = \frac{\Sigma}{4} \frac{9\Sigma - 8}{\Sigma - 1} \frac{1}{r^2}, \quad (4.5)$$

e o correspondente escalar de curvatura

$$R = -\frac{\Sigma}{2} \frac{9\Sigma - 8}{\Sigma - 1} \frac{1}{r^2}, \quad (4.6)$$

que serão iguais a zero somente se $\Sigma = 8/9$ ou $\Sigma = 0$, ou seja, os únicos casos para os quais a métrica decorre em Minkowski.

Uma característica muito interessante aparece quando estudamos as equações de Euler-Lagrange da (4.3)

$$\begin{aligned} \dot{t}(1 - \Sigma) &= \ell, \\ \ddot{r}(1 - \Sigma) \left(1 - \frac{3\Sigma}{2}\right)^{-1} &= r \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right), \\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} &= r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2, \\ r^2\dot{\phi} &= h, \end{aligned} \tag{4.7}$$

sendo ℓ , o momento angular, e h , o momento angular relativo, ambos constantes, e $\dot{X} \equiv dX/ds$. As transformações $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\dot{\theta} \rightarrow -\dot{\theta}$, $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$ and $\sin \theta \rightarrow \sin \theta$ deixam a equação invariante; portanto as únicas condições iniciais que resolvem as equações (4.7) são $\dot{\theta} = 0$ e $\theta = \pi/2$, resultando na solução equatorial $\theta = \pi/2$. Finalmente, obtemos a equação para o movimento orbital

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + (1 - \Sigma)^{-1} \left(1 - \frac{3\Sigma}{\ell}\right) u = 0, \tag{4.8}$$

onde usamos a transformação de coordenadas $u \equiv 1/r$.

Considerando o caso clássico para forças centrais, podemos reescrever a equação (4.8) de forma análoga à equação de Binet, $\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{dV(\phi)}{d\phi}/(h^2 u^2)$, assim

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = (1 - \Sigma)^{-1} \Sigma u, \tag{4.9}$$

com o potencial efetivo dado por

$$V_{eff}(r) = -\frac{h^2}{2} \frac{\Sigma}{1 - \Sigma} \frac{1}{r^2}. \tag{4.10}$$

A solução da equação (4.9) é, portanto,

$$u(\phi) = A_1 \sin \left(\sqrt{\frac{2\Sigma - 1}{\Sigma - 1}} \phi \right) + A_2 \cos \left(\sqrt{\frac{2\Sigma - 1}{\Sigma - 1}} \phi \right), \tag{4.11}$$

onde A_1 e A_2 são constantes. Podemos concluir da equação (4.10) que o potencial efetivo depende do momento angular do objeto.

4.3 Um modelo estelar

Nessa seção, idealizamos um objeto esférico cuja fonte é dividida em duas regiões: uma região interna com campo escalar constante e outra região interna, porém exterior a

primeira, com a métrica de Schwarzschild não-vazia. Por fim, o sistema encontra-se embebido no vazio, descrito pela métrica de Schwarzschild. O procedimento consiste em “colar” essas três variedades quadri-dimensionais, sendo que a primeira, (I), apresenta simetria estática esfericamente simétrica (limitada pela superfície $r = R_a$) gerada por um campo escalar constante Φ , conforme discutido para a métrica (4.3). Esquemáticamente:

$$\begin{aligned} ds_I^2 &= \frac{\left(1 - \frac{3}{2}\Sigma\right)^2}{(1 - \Sigma)} dt^2 - \frac{(1 - \Sigma)}{\left(1 - \frac{3}{2}\Sigma\right)^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \\ p_I &= \frac{\rho_I}{2} \frac{1 - 3\Sigma}{2 - 3\Sigma}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

com densidade de energia e pressão isotrópica uniformes. Fizemos uma redefinição do sistema de coordenadas temporais para que o produto $q^{\mu\nu}q_{\mu\nu} = 1$.

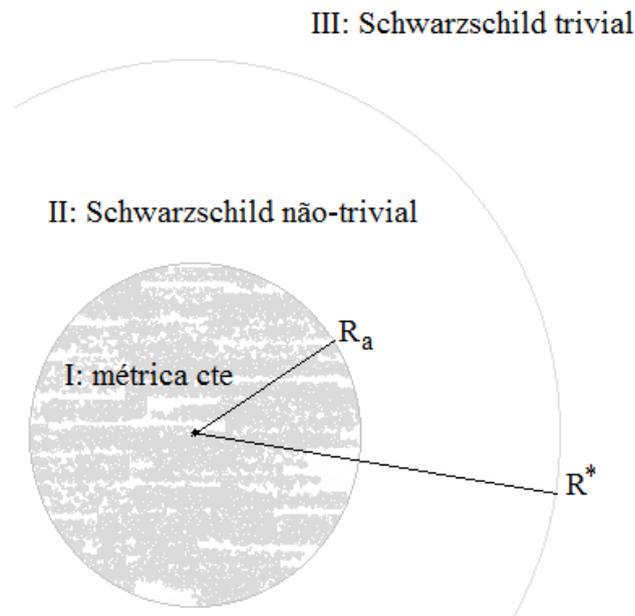


FIGURA 4.3: Modelo estelar na GSG.

A primeira variedade encontra-se embebida numa segunda, descrita pela métrica de Schwarzschild, mas não-vazia e sim preenchida por um fluido em estado inerte conforme discussão anterior. A segunda variedade, (II), tem a seguinte descrição

$$\begin{aligned} ds_{II}^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \\ p_{II} &= \rho_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{3M}{r}\right), \\ \rho_{II} &= \rho_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{6M}{r}\right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde ρ_0 é uniforme.

Para garantir a “colagem” entre as duas variedades é necessário satisfazer as condições de junção: o campo escalar, e por consequência a função métrica α , e a pressão isotrópica devem permanecer contínuas através da superfície $r = R_a$. Como resultado, obtemos as seguintes equações

$$\rho_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{3M}{r}\right) = \frac{\rho_I}{2} \frac{1 - 3\Sigma}{2 - 3\Sigma} \quad (4.14)$$

e

$$\frac{\left(1 - \frac{3}{2}\Sigma\right)^2}{(1 - \Sigma)} = 1 - \frac{2M}{R_a}. \quad (4.15)$$

Da equação (4.15) temos

$$\Sigma_{\pm} = \frac{2}{9} \left[2 + \frac{2M}{R_a} \pm \sqrt{\left(4 - \frac{2M}{R_a}\right) \left(1 - \frac{2M}{R_a}\right)} \right]. \quad (4.16)$$

A região (III) é vazia, com $p = \rho = 0$, e, portanto, descrita pela métrica de Schwarzschild. As expressões correspondentes são

$$\begin{aligned} ds_{III}^2 &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \\ p_{III} &= 0, \\ \rho_{III} &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Das condições de contorno entre as regiões (II) e (III) temos que o campo escalar, a métrica α , e a pressão isotrópica devem permanecer contínuas através da superfície $r = R^*$. As métricas são idênticas, logo a equação $ds_{II}^2(R^*) = ds_{III}^2(R^*)$ é imediatamente satisfeita. Dessa forma, o único requerimento para “colagem” vem da equação

$$\rho_0 \left(1 - \frac{2M}{R^*}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{3M}{R^*}\right) = 0, \quad (4.18)$$

que resulta em $R^* = 3M$. Por conta do horizonte de eventos em $r = 2M$, o raio da região interna (I) deve estar entre o intervalo $2M < R_a < 3M$.

Note que, pelo resultado da seção 3.2.2 do capítulo 3, $r = 3M$ apresenta órbitas instáveis para partículas não-massivas.

Em relação a possibilidade da região (I) imitar o comportamento de conhecidos fluidos perfeitos, temos

- para a poeira: $\lambda = 0 \Rightarrow \Sigma = 1/3$. Neste caso, o fluido inerte desaparece e dá lugar ao vazio trivial, com $R_a = 1,6 \times 2M > 3M = R^*$. Logo, teríamos o raio da região (I) maior que o raio da região (III);
- para radiação: $\lambda = 1/3 \Rightarrow \Sigma = -1/3$. Resolvendo a condição de contorno (4.14) temos $2M = -\frac{11}{16}R_a$, o que é inconsistente;
- para matéria dura: $\lambda = \Sigma = 1$ resulta $2M \gg R_a$, o que é também inconsistente;
- para constante cosmológica: $\lambda = -1 \Rightarrow \Sigma = 5/9$. Temos $R_a = 16/15 \times 2M$ com $p_I = -\rho_I = \text{cte}$, para a região interna. E também $p_{II}(r = R_a) = -\rho_I$ e $\rho_{II}(r = R_a) = -\frac{29}{13}\rho_I$. A densidade de energia para a região de Schwarzschild

$$\rho_{II}(r) = \frac{32}{13} (16)^{-5/2} \left(1 - \frac{15 R_a}{16 r}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{45 R_a}{32 r}\right) \quad (4.19)$$

é sempre negativa, como podemos ver no gráfico (4.1).

4.4 Comentários

Desenvolvemos um modelo estelar para o qual um campo escalar Φ constante e a métrica não-vazia de Schwarzschild (com fluido inerte) são a fonte da gravitação de uma estrutura esférica embebida no espaço-tempo vazio descrito pela métrica de Schwarzschild. Das comparações com fluidos perfeitos não conseguimos resgatar nenhuma solução consistente. Entretanto, se consideramos que a fonte da estrela contém apenas a região (I), a solução para $\lambda = 0$ implica em uma esfera super compacta preenchida por poeira no vácuo, perdendo as propriedades de fluido inerte para vazio trivial. É interessante notar o caráter compacto dessa estrela, com raio igual $1,6 r_H$, lembrando que a solução de Schwarzschild na GSG tem duas superfícies de aprisionamento em $r = r_H = 2M$ e $r = 3M$. Portanto, obtivemos um objeto compacto cujas trajetórias dependem da sua própria rotação e, de acordo com a equação (4.11), satisfazem a solução

$$u(\phi) = A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\phi}{2}}\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{\phi}{2}}\right). \quad (4.20)$$

Claro está que as características não-usuais do nosso objeto, entretanto, não passam de curiosidade matemática. O fluido inerte surge das equações de campo como uma possibilidade das próprias equações, sem remeter a nenhum fluido físico real ou idealizado¹. Finalizamos dizendo que esse fluido inerte, se existisse, não teria comportamento

¹Estruturas matemáticas semelhantes já são conhecidas na literatura e foram descritas pela primeira por Nordström em 1912 [27].

similar a nenhum fluido conhecido e, ao aplicarmos as condições de contorno ao objeto, nos parece mais razoável concluir que a GSG, enquanto teoria da gravitação, tenderia a produzir objetos ultracompactos (com fonte de poeira e envoltos no vazio).

Capítulo 5

Conclusões

No capítulo (1) apresentamos a motivação deste trabalho como parte do processo de caracterização da GSG em relação às observações e soluções bem sucedidas da teoria padrão da gravitação. Faz-se necessário entender o comportamento da GSG sobre soluções, observações e experimentos conhecidos a fim de determinar seus pontos convergentes e, eventualmente, os divergentes e assim situar a GSG em relação a outras teorias alternativas. De forma resumida, apresentamos também um breve esquema sobre como conduzir essa metodologia:

- devemos obter soluções limites compatíveis com a gravitação Newtoniana, e as mesmas devem ser estáveis;
- devemos obter soluções estáveis que descrevam fenômenos observáveis.

Dependendo do desempenho da GSG nesses testes, podemos medir o seu grau de competitividade em relação a RG e outras teorias alternativas da gravitação. Ou ainda, utilizar os resultados obtidos para construir uma teoria escalar mais adequada, como por exemplo inferir uma melhor opção para o campo potencial $V(\Phi)$, escolhido na equação (2.18).

Por outro lado, supormos que formulações (e/ou soluções) análogas às teorias anteriores podem ou devem ser satisfeitas numa nova teoria da gravitação não é a abordagem mais adequada para a GSG. De fato, é importante para a teoria apresentar soluções a problemas físicos e no caso da GSG faz-se necessário uma nova formulação do problema do interior estelar. Portanto, a elaboração de novas hipóteses e o posterior teste dessas pode constituir uma nova linha de pesquisa da GSG.

De qualquer maneira, independente do desenvolvimento das propostas acima, a GSG pode ser vista como uma teoria métrica pioneira na criação de uma linha de pesquisa em

gravitação escalar. Pois seus alicerces, baseados no trabalho [28], são sólidos o bastante para superar totalmente as inconsistências teóricas de modelos escalares anteriores. Além disso, ao considerarmos as questões em aberto da gravitação, o regresso aos princípios e fundamentos da RG podem contribuir para a renovação da mesma, uma vez que a GSG volta à época pré-RG e, usando as mesmas hipóteses fundamentais, desenvolve uma teoria com apenas uma componente ao invés de dez, como na RG. E, apesar da dificuldade da GSG na descrição de objetos com rotação, o trabalho de extensão da teoria para dois campos escalares [29] pode superar essa dificuldade representando o campo gravitacional com apenas duas componentes.

No capítulo (2) revisitamos o trabalho original da GSG [13] e os detalhes da teoria. Lembrando, novamente, seus princípios e consequências:

- a interação gravitacional é descrita pelo campo escalar Φ ;
- o campo Φ satisfaz uma dinâmica não-linear;
- a teoria satisfaz o princípio geral de covariância, não sendo, portanto, restrita à relatividade especial;
- toda matéria e energia interage com o campo Φ somente através da métrica pseudo-Riemanniana $q_{\mu\nu} = a\eta_{\mu\nu} + b\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi$, para a qual os parâmetros a e b são funcionais de Φ e são completamente determinados pela Lagrangiana do campo;
- a fonte do campo gravitacional é descrita por outras componentes do tensor energia-momento, e não apenas pelo seu traço;
- as partículas massivas e não-massivas seguem geodésicas com relação a $q_{\mu\nu}$,
- a teoria satisfaz os testes do sistema solar;
- e oferece uma formulação para a energia gravitacional [34].

Já no capítulo seguinte, (3), começamos a discutir aspectos ligados às soluções estáticas esfericamente simétricas da GSG. Quanto às soluções de vácuo, demonstramos a unicidade da solução de Schwarzschild e, portanto, a validade do teorema de Birkhoff na GSG. O estudo de estabilidade dessas soluções para partículas não-massivas de spin zero, através de métodos perturbativos lineares, mostrou que a GSG apresenta duas superfícies de aprisionamento: em $r = 2M$, horizonte de evento oriundo da métrica de Schwarzschild, e $r = 3M$, do forma do potencial da GSG. Uma partícula não-massiva que passe pelo horizonte de eventos em $r = 3M$ nunca alcança $r = 0$, pois é capturada pela superfície $r = 2M$. No caso de órbitas estáveis, a teoria é consistente com a RG e exhibe o mesmo resultado para a superfície $r = \frac{L^2}{M}$. Por sua vez, as órbitas estáveis são

possíveis e tendem para $r \rightarrow 3M$ para l muito grande. Essas mesmas superfícies variam com o momento angular da partícula.

Ao estudarmos o caso da solução com equação de estado $\rho = \text{constante}$, para fluidos incompressíveis, demonstramos, qualitativamente e através de uma aproximação de campo fraco iterativa, que as soluções sempre apresentam pressão isotrópica negativa. Esse resultado, independentemente das soluções para as superfícies de aprisionamento $r = 2M$ e $r = 3M$, sugere que a descrição de estrelas na GSG deve ser reformulada. Em futuros estudos, a GSG pode tentar estabelecer o que seria o equivalente às hipóteses de Buchdahl, por exemplo, uma vez que não podemos comparar o limite inferior de compacidade de Schwarzschild ($R = 9M/4$) com o correspondente da GSG, e isso talvez possa motivar novas hipóteses para a composição estelar que sejam compatíveis entre as observações e a descrição dada pela GSG. Mas, se as hipóteses de Buchdahl permanecerem, não existe a possibilidade da GSG oferecer boas representações estelares nem quando consideramos descrições com n regiões internas dentro da estrela (respeitando os limites $0 < r < 3M$ e $r > 3M$), pois qualquer camada interior à estrela e imediatamente anterior à camada externa (vazio) apresentará pressão negativa não importando a abordagem ou método numérico utilizado. E se for utilizada outra métrica que não seja Schwarzschild para descrever o vazio, a teoria passa a não satisfazer o teorema de Birkhoff. Recomendamos, portanto, que esses pontos sejam levados em considerações ao se buscar alternativas para novas teorias gravitacionais escalares do tipo da GSG.

Também apresentamos uma formulação para estrelas Newtonianas, que ainda deve ser explorada quanto à sua estabilidade e interpretação física de massa gravitacional. A GSG só apresenta descrição para as estrelas da sequência principal se a massa gravitacional for associada ao campo escalar através da expressão $m(r) = r^2 \frac{d\Phi}{dr}$.

Um método geral de obtenção de soluções analíticas, seguindo os procedimentos de Tolman [36], foi proposto para a GSG. O exemplo apresentado em sequência sugere etapas da elaboração das mesmas, mas não abordamos as implicações físicas do exemplo apresentado.

Ainda descrevemos um modelo estelar baseado em soluções exóticas da GSG com dois fluidos com fonte: uma métrica constante envolvida por um espaço-tempo não vazio, preenchido por um fluido em estado inerte, cuja geometria é descrita pela métrica de Schwarzschild, sendo a região externa vazia ($p = \rho = 0$) e descrita pela métrica de Schwarzschild. Quando restringimos a fonte da gravitação a fluidos perfeitos usuais, como poeira, radiação, matéria dura e constante cosmológica, as condições de contorno do problema impõem que o fluido em estado inerte seja o próprio vácuo e que a estrela seja compacta, com raio igual a $1,6 r_H$, e sem pressão.

Como projeto futuro, passaremos a próxima etapa de consolidação e testes da GSG: a implementação de métodos numéricos para a obtenção de soluções internas estáticas esfericamente simétricas e, possivelmente, o teste de novas hipóteses da GSG para a descrição de estrelas. Aplicaremos o método numérico inicialmente ao conjunto de equações TOV-GSG sem impor equação de estado, tal qual realizado por Tolman em [36]. E, a seguir, tomaremos como fonte fluidos descritos por equações de estado politrópicas a fim de obter, entre outros resultados, o limite de Chandrasekhar. Posteriormente, testaremos a equação de estado do gás de Fermi ideal para o tratamento de estrelas de nêutrons.

Consideramos de enorme importância essa caracterização da GSG. Por um lado, recuperar o limite de Chandrasekhar nos garante a descrição de estrelas anãs brancas. E, por outro, o estudo das estrelas de nêutron fará uma ponte entre a GSG e as previsões no âmbito nuclear. As observações de massas e raios para estrelas de nêutrons são usadas para testar teorias da física nuclear como forma de checar as modelagens termodinâmicas usadas nas equações de estado. Talvez, uma abordagem deste tipo, nos traga mais *insights* sobre como obter um potencial $V(\Phi)$ mais adequado para uma nova teoria da gravitação escalar, capaz de descrever modelos estelares consistentes com as observações.

Realmente, vivemos muito sombrios!
A inocência é loucura. Uma fronte sem rugas
denota insensibilidade. Aquele que ri
ainda não recebeu a terrível notícia
que está para chegar.

Que tempos são estes, em que
é quase um delito
falar de coisas inocentes.

Pois implica silenciar tantos horrores!
Esse que cruza tranquilamente a rua
não poderá jamais ser encontrado
pelos amigos que precisam de ajuda?

É certo: ganho o meu pão ainda,
Mas acreditai-me: é pura casualidade.

Nada do que faço justifica
que eu possa comer até fartar-me.

Por enquanto as coisas me correm bem
(se a sorte me abandonar estou perdido).

E dizem-me: “Bebe, come! Alegra-te, pois tens o quê!”

Mas como posso comer e beber,
se ao faminto arrebatado o que como,
se o copo de água falta ao sedento?
E todavia continuo comendo e bebendo.

Também gostaria de ser um sábio.
Os livros antigos nos falam da sabedoria:
é quedar-se afastado das lutas do mundo
e, sem temores,
deixar correr o breve tempo. Mas
evitar a violência,
retribuir o mal com o bem,
não satisfazer os desejos, antes esquecê-los
é o que chamam sabedoria.
E eu não posso fazê-lo. Realmente,
vivemos tempos sombrios.

Para as cidades vim em tempos de desordem,
quando reinava a fome.

Misturei-me aos homens em tempos turbulentos
e indignei-me com eles.
Assim passou o tempo
que me foi concedido na terra.

Comi o meu pão em meio às batalhas.
Deitei-me para dormir entre os assassinos.
Do amor me ocupei descuidadamente
e não tive paciência com a Natureza.
Assim passou o tempo
que me foi concedido na terra.

No meu tempo as ruas conduziam aos atoleiros.
A palavra traiu-me ante o verdugo.
Era muito pouco o que eu podia. Mas os governantes
Se sentiam, sem mim, mais seguros, — espero.
Assim passou o tempo
que me foi concedido na terra.

As forças eram escassas. E a meta
achava-se muito distante.
Pude divisá-la claramente,
ainda quando parecia, para mim, inatingível.
Assim passou o tempo
que me foi concedido na terra.

Vós, que surgireis da maré
em que perecemos,
lembrai-vos também,
quando falardes das nossas fraquezas,
lembrai-vos dos tempos sombrios
de que pudestes escapar.

Íamos, com efeito,
mudando mais frequentemente de país
do que de sapatos,
através das lutas de classes,
desesperados,
quando havia só injustiça e nenhuma indignação.

E, contudo, sabemos
que também o ódio contra a baixaza

endurece a voz. Ah, os que quisemos
preparar terreno para a bondade
não pudemos ser bons.
Vós, porém, quando chegar o momento
em que o homem seja bom para o homem,
lembrai-vos de nós
com indulgência.

“Aos que vierem depois de nós”

em Círculo de giz caucasiano
de Bertold Brecht
tradução de Manuel Bandeira

Ilustração: Tomás Saraceno. Projeto *In Orbit*. 2013. Em <http://tomassaraceno.com/projects/in-orbit/#&gid=1&pid=1>.

Apêndice A

Trajetórias geodésicas na teoria da relatividade geral e na teoria geométrico-escalar da gravitação

Breve comentário sobre as trajetórias geodésicas na métrica de Schwarzschild, segundo a teoria da relatividade geral e na teoria geométrico-escalar da gravitação. Referência [43].

Considere a métrica de Schwarzschild dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{A.1})$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Com as seguintes equações de Euler-Lagrange, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} \right)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[2\dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right] &= 0, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) &= r^2 \cos \theta \sin \theta, \\ \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

sendo $\dot{X} = dX/d\tau$ e τ , o parâmetro afim. A equação para a coordenada r é obtida tomando a métrica (A.1) e dividindo-a por ds^2 , assim:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = \epsilon, \quad (\text{A.3})$$

onde $\epsilon = 0$ ou $\epsilon > 0$ dependendo se a partícula é não massiva (geodésica nula) ou massiva (geodésica tipo-tempo), respectivamente.

Observe que as equações são invariantes sob a transformação $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Como o campo é isotrópico podemos considerar a órbita da partícula confiada no plano equatorial, ou seja, $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = 0$. As equações (A.2) podem, então, serem reescritas como

$$\begin{aligned} \dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) &= E, \\ r^2 \dot{\phi} &= L, \end{aligned} \tag{A.4}$$

onde L é o momento angular total e E é a energia da partícula.

Realizamos uma mudança entre os parâmetros afins τ par ϕ de forma que

$$\dot{r} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} \Rightarrow \dot{r} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\phi}.$$

Por fim, aplicando os resultados das equações (A.4) e a mudança de parâmetros afins, a equação (A.3) nos retorna

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{\epsilon M}{L^2} + 3\gamma M u^2, \tag{A.5}$$

após aplicarmos a mudança de variável $r = 1/u$ e a tomarmos a derivada da equação. A constante γ foi inserida posteriormente apenas para indicar a contribuição da gravitação: $\gamma = 0$ para a gravitação newtoniana e $\gamma = 1$ para RG ou GSG. Supondo que a contribuição do segundo termo à direita da equação (A.5) seja pequena comparada com a contribuição newtoniana, podemos escrever a equação na forma:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \bar{\epsilon} + \frac{\epsilon_g}{\bar{\epsilon}} u^2, \tag{A.6}$$

onde $\bar{\epsilon} \equiv \frac{\epsilon M}{L^2}$ e $\epsilon_g \equiv \frac{3M}{L^2}$, que a contribuição da gravitação (relativística ou escalar). Logo, esse adicional na precessão dos periélios dos planetas pode ser escrita como

$$\delta\phi_g = 2\pi\epsilon_g = \frac{6\pi G^2 M^2}{c^2 r^2 v_t^2}, \tag{A.7}$$

onde $M \rightarrow \frac{GM}{c^2}$. Como $L = r^2 \dot{\phi}$, sendo $\dot{\phi} = \frac{v_t}{cr}$ e v_t , a velocidade tangente da partícula, então $L = \frac{r v_t}{c}$.

Apêndice B

Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff na teoria da relatividade geral

Para um problema estático com simetria esférica, a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = e^{-2\eta(r)} dt^2 - e^{-2\xi(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{B.1})$$

As equações de Einstein são

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -k T_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.2})$$

para as quais $R_{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura, $T_{\alpha\beta}$ é o tensor momento-energia, $k \equiv 8\pi G c^4$, G é a constante Newtoniana e c é a velocidade da luz no vácuo.

Escolhemos o tensor energia-momento de um fluido perfeito

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) V_\alpha V_\beta - p g_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.3})$$

sendo ρ a densidade de energia, p é a pressão isotrópica e V^α é uma classe de observadores comóveis tais que $V^\alpha = e^{-\eta(r)} \delta_0^\alpha$.

Ao resolver as equações de Einstein (B.2), obtemos

$$\frac{d\eta(r)}{dr} = \frac{k p r^3 / 2 + m(r)}{r (r - 2m(r))}, \quad (\text{B.4})$$

e

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{k}{2}\rho r^2, \quad (\text{B.5})$$

sendo a função $m(r)$ definida como $m(r) \equiv (1 - e^{2\xi}) r/2$.

A conservação do tensor energia-momento projetada sobre o espaço ortogonal a V^α , ou seja, quando $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, é

$$\frac{dp(r)}{dr} = -(\rho + p)\frac{d\eta}{dr}, \quad (\text{B.6})$$

sendo $h_{\alpha\beta}$, o tensor projeção $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta$.

Substituindo a equação (B.4) em (B.6), encontramos

$$\frac{dp(r)}{dr} = -(\rho + p)\frac{kpr/2 + m(r)}{r(r - 2m(r))}, \quad (\text{B.7})$$

que é a equação de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff (TOV) da RG. Essa equação combinada com (B.5) e a equação de estado $p = p(\rho)$, que descreve o comportamento da matéria-energia dentro do objeto, estabelecem um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem para as três funções a serem determinadas: m , p e ρ .

Para determinar como uma partícula de massa M gera a métrica do espaço vazio que a envolve, devemos assumir ρ e p nulos e resolver as equações (B.4) e (B.5). Da interpretação dos resultados obtemos o significado físico da função $m(r)$ como a massa gravitacional e, portanto, $M = m(r = r_*)$, ou seja, a massa total do objeto, M , será igual ao valor da função $m(r)$ na superfície da estrela, cuja raio é r_* . Obtemos, também, a métrica para o espaço vazio como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

que é a conhecida métrica de Schwarzschild.

A métrica de Schwarzschild [39] foi elaborada em 1916 e é a primeira solução exata para as equações de Einstein, embora nada tenha sido dito sobre a unicidade do resultado na época da publicação. Alguns anos mais tarde, em 1921, o físico norueguês Jørg Tofte Jebsen [44] provou que qualquer solução de campo no vácuo com simetria esférica tem que ser estáticas e assintoticamente planas. Em outras palavras, a solução externa é dada *unicamente* pela métrica de Schwarzschild, resultado conhecido como teorema de Birkoff, em homenagem ao famoso matemático que encontrou os mesmos resultados dois anos mais tarde...

O sistema formado pela equações (B.5), (B.7) e pela equação de estado $p = p(\rho)$ obedecem no limite Newtoniano, a equação hidrostática. Para verificar esse resultado, devemos

considerar a métrica quase plana e desprezar a pressão isotrópica quando comparada com a densidade de energia. Quando isto é feito, recuperamos, como esperado, a equação de Chandrasekhar:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{m(r)\rho}{r^2}. \quad (\text{B.8})$$

Apêndice C

Gravitação Mimética

Contribuição original da candidata

Segundo Mukhanov e Chamseddine [45] é possível reformular a teoria da gravitação de Einstein isolando o grau de liberdade conforme de uma maneira invariante. Isto é feito introduzindo uma métrica física em termos de uma métrica auxiliar e um campo escalar aparecendo através de suas primeiras derivadas. As equações de movimento resultantes dividem-se em uma equação sem traço obtida da variação com respeito à métrica auxiliar e uma equação diferencial para a parte com traço não nulo. Como resultado, o grau de liberdade conforme torna-se dinâmico mesmo na ausência de matéria. Devido a esse comportamento, podemos interpretar o grau de liberdade extra como uma imitação dos efeitos gravitacionais da matéria escura. Os autores cunharam o nome *gravitação mimética* (GM) a todos os efeitos gravitacionais gerados por um campo na ausência de matéria. GM tem sido objeto de intenso debate, seja imitando efeitos de matéria escura [45], como de inflação, quintessência ou ricochete em universos não singulares [46], e até mesmo unificando matéria escura com energia escura [47]. Há ainda o estudo de soluções miméticas para teorias escalares-vetoriais-tensoriais [19] e teoria $f(R)$ [48], [49] e [50], por exemplo.

Vamos discutir nesse apêndice como construir soluções miméticas através de transformações conformes (*disformações*), de acordo com o trabalho [51].

C.1 Gravitação mimética: teorias escalares-tensoriais

Em teorias escalares-tensoriais nas quais a gravitação é descrita pela métrica $g_{\mu\nu}$ e por um campo escalar Ψ é possível trabalhar tanto com o “*Jordan frame*” dado pela ação de

Einstein-Hilbert (isto é, $f(R)$ em vez de R) mas com a matéria minimamente acoplada com a métrica $g_{\mu\nu}$, ou com “*Einstein frame*”, onde a ação de Einstein-Hilbert associada à métrica conforme $l_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}/F(\Psi(x^\mu))$ mas com a matéria não-minimamente acoplada com $l_{\mu\nu}$. Trabalhar num “*frame*” ou em outro é, até então, uma questão de escolher o mais adequado para o problema em mãos, uma vez que as previsões observacionais são as mesmas (exceto para casos patológicos nos quais o fator conforme F diverge ou é nulo)¹.

A equivalência entre as duas descrições é particularmente surpreendente quando consideramos estritamente a RG, para a qual temos a ação de Einstein-Hilbert com matéria minimalmente acoplada com a métrica [54]. De fato, se escrevemos a ação em termos da métrica $l_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}F(\Psi(x^\mu))$ de tal forma que se pareça com a ação de uma teoria escalar-tensorial, as equações de movimento obtidas extremizando a ação com respeito a $l_{\mu\nu}$ e Ψ terão um aspecto muito diferente das equações de Einstein, porém, claro está, podem ser transformadas de volta nas equações de Einstein para $g_{\mu\nu}$ ao realizarmos a transformação inversa, $l_{\mu\nu} = Fg_{\mu\nu}$, por isso o nome de relatividade geral “disfarçada” (“*veiled*”).

Por outro lado, transformações mais gerais que as conformes vem sendo estudadas há muito tempo, em particular as “disformações” examinadas primeiramente por Berkenstein [55], tais como

$$g_{\mu\nu} = F(\Psi, w) l_{\mu\nu} + H(\Psi, w) \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi, \text{ onde } w \equiv l^{\rho\sigma} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi, \quad (\text{C.1})$$

onde as funções F e H são arbitrárias. A invariância de equações de campo como de Klein-Gordon, Maxwell e Horndeski sob o efeito de tais transformações forma recentemente estudadas em, respectivamente, ([56], [57]), ([31]) e ([16], [17], [58]).

Por outro lado, uma classe particular de métricas disformes com $F = w$ e $H = 0$, para as quais

$$g_{\mu\nu} = w l_{\mu\nu}, \quad (\text{C.2})$$

foi considerada em [45] onde a ação para a RG (padrão) com matéria minimalmente acoplada com $g_{\mu\nu}$ foi extremizada não com respeito a $g_{\mu\nu}$, mas com respeito a $l_{\mu\nu}$ e Ψ , como dissemos anteriormente. É de alguma forma surpreendente que as equações

¹Como qualquer experimento ou observação depende do referencial sobre o qual é examinado, dois observadores em referenciais diferentes experimentam o mesmo fenômeno físico de formas distintas, de tal forma que a transformação entre os dois deve levar em conta todas as alterações de escala necessárias. Se não efetuarmos a transformação de maneira adequada, concluímos, equivocadamente, tratar-se de dois fenômenos físicos ao invés de apenas um. No caso da transformação conforme, é importante ter em mente que ela altera não só o espaço mas também todas as escalas de comprimento. Por isso, a equivalência entre o “*Jordan frame*” e “*Einstein frame*” é demonstrada ao compararmos quantidades que sejam conformalmente invariantes. A controvérsia está nas diferentes interpretações das equações da RG em um *frame* ou no outro. As relações entre os observáveis, porém, são completamente independente da representação conforme que seja escolhida. Discussões sobre as diferentes interpretações e a equivalência entre os dois *frames* podem ser encontradas em [52] e [53].

encontradas não sejam apenas equações de Einstein “disfarçadas”, e sim, novas classes de soluções. De acordo com as soluções cosmológicas encontradas em [45], essa gravitação mimética é capaz de imitar a contribuição de um fluido sem pressão com a matéria escura. Comentários sobre a sua estrutura foram feitos em [59]. Em [60] foi mostrado que elas podem ser deduzidas ao extremizarmos, com respeito a $g_{\mu\nu}$, a ação $S + \int \lambda \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi - 1) d^4x$, onde S é a ação de Einstein-Hilbert e λ é um multiplicador de Lagrange. Este resultado foi explorado em [47], e foi estendido para incluir uma descrição para energia escura também. E, por fim, as formulações Hamiltonianas foram apresentadas em [19] e [61].

O propósito desse trabalho é primeiramente mostrar (na seção C.3) que, em acordo com a equivalência conforme existente entre os *frames* de Jordan e Einstein quanto às teorias escalares-tensoriais da gravitação, as equações de movimento deduzidas da ação da RG padrão com matéria minimalmente acoplada com $g_{\mu\nu}$ são as equações de Einstein, não importa se obtidas ao extremizarmos com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$, ou com respeito à $l_{\mu\nu}$ e Ψ , quando ambos estão relacionados através da deformação genérica (C.1).

Entretanto, posteriormente será mostrado (na seção C.4) que há uma classe de soluções disformes com a função H dada por

$$H(w, \Psi) = -\frac{F(w, \Psi)}{w} + h(\Psi), \quad (\text{C.3})$$

na métrica (C.2), para as quais as equações de movimento não são as equações de Einstein e, além disso, podem ser reduzidas às equações miméticas de movimento encontradas em [45] quando o vetor $\partial_\mu \Psi$ é tipo-tempo.

Em seguida, (na seção C.5), daremos, para o vetor tipo-espaço $\partial_\mu \Psi$, a solução estática esfericamente simétrica não-trivial (quer dizer, não-Schwarzschild) do vácuo para a gravitação mimética. Essa difere enormemente da conhecida solução de Schwarzschild.

C.2 Equações de movimento

Considere a ação de Einstein-Hilbert,

$$S = \frac{1}{2k} \int R \sqrt{-g} d^4x + S_m[\phi_m, g_{\mu\nu}]. \quad (\text{C.4})$$

$k \equiv 8\pi G$ é a constante de Einstein, g é o determinante das componentes da métrica $g_{\mu\nu}$ no sistema de coordenadas x^μ (assinatura $-+++$) e R é o seu escalar de curvatura; os campos materiais ϕ_m são minimalmente acoplados com a métrica.

Na RG, a métrica $g_{\mu\nu}$ descreve a gravidade e as equações de Einstein são obtidas através da extremização da ação com respeito a suas variações. Aqui, os campos fundamentais que descrevem os efeitos gravitacionais são dados por uma outra métrica $l_{\mu\nu}$ e um campo escalar Ψ , que definem $g_{\mu\nu}$ através da disformação [55]:

$$g_{\mu\nu} = F(\Psi, w) l_{\mu\nu} + H(\Psi, w) \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi, \quad \text{onde } w \equiv l^{\rho\sigma} \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi. \quad (\text{C.5})$$

Lembrando que as funções F e H são arbitrárias (assumindo que $F \neq 0$). Na GM [45], $F = w$ e $H = 0$.

Variar a ação com respeito a $l_{\mu\nu}$ e Ψ é um cálculo direto.

Primeiramente temos, ignorando os termos de contorno,

$$\delta S = -\frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} (G^{\mu\nu} - kT^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} \quad \text{onde } T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (\text{C.6})$$

sendo $G_{\mu\nu}$, o tensor de Einstein. A invariança da ação sob difeomorfismos $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} = D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu$, juntamente com a identidade de Bianchi $D_\nu G^\nu_\mu \equiv 0$, garante que o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ seja conservado,

$$D_\nu T^\nu_\mu = 0, \quad (\text{C.7})$$

onde D_μ é a derivada covariante de Levi-Civita associada com a métrica $g_{\mu\nu}$ e os índices contraem-se com $g_{\mu\nu}$: $T^\nu_\mu \equiv g_{\mu\rho} T^{\nu\rho}$.

Em segundo lugar, temos

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu} = & F \delta l_{\mu\nu} - \left(l_{\mu\nu} \frac{\partial F}{\partial w} + \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi \frac{\partial H}{\partial w} \right) \left[(l^{\alpha\rho} \partial_\alpha \Psi)(l^{\beta\sigma} \partial_\sigma \Psi) \delta l_{\rho\sigma} - 2l^{\rho\sigma} (\partial_\rho \Psi)(\partial_\sigma \delta \Psi) \right] \\ & + \left(l_{\mu\nu} \frac{\partial F}{\partial \Psi} + \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi \frac{\partial H}{\partial \Psi} \right) \delta \Psi + H [(\partial_\mu \Psi)(\partial_\nu \delta \Psi) + (\partial_\nu \Psi)(\partial_\mu \delta \Psi)]. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

A seguir as equações de movimento: $\delta S / \delta l_{\mu\nu} = 0$, ou seja,

$$F (G^{\mu\nu} - kT^{\mu\nu}) = \left(A \frac{\partial F}{\partial w} + B \frac{\partial H}{\partial w} \right) (l^{\mu\rho} \partial_\rho \Psi)(l^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Psi), \quad (\text{C.9})$$

onde $A \equiv (G^{\rho\sigma} - kT^{\rho\sigma}) l_{\rho\sigma}$ e $B \equiv (G^{\rho\sigma} - kT^{\rho\sigma}) \partial_\rho \Psi \partial_\sigma \Psi$.

E $\delta S/\delta\Psi = 0$, isto é,

$$\frac{2}{\sqrt{-g}}\partial_\rho \left\{ \sqrt{-g}\partial_\sigma\Psi \left[H(G^{\rho\sigma} - kT^{\rho\sigma}) + \left(A\frac{\partial F}{\partial w} + B\frac{\partial H}{\partial w} \right) l^{\rho\sigma} \right] \right\} = A\frac{\partial F}{\partial\Psi} + B\frac{\partial H}{\partial\Psi}. \quad (\text{C.10})$$

Note que para GSG a métrica $l_{\mu\nu}$ é uma métrica plana e fixa, de tal forma que as equações de movimento reduzem-se a uma única equação para o campo escalar Ψ , como em (C.10).

C.3 O caso genérico: relatividade geral disfarçada

Contrariando as equações de movimento (C.9) com respeito a $l_{\mu\nu}$ e $\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi$ resultam em

$$A\left(F - w\frac{\partial F}{\partial w}\right) - Bw\frac{\partial H}{\partial w} = 0, \quad Aw^2\frac{\partial F}{\partial w} - B\left(F - w^2\frac{\partial H}{\partial w}\right). \quad (\text{C.11})$$

O determinante \det do sistema é

$$\det = w^2 F \frac{\partial}{\partial w} \left(H + \frac{F}{w} \right). \quad (\text{C.12})$$

No caso genérico quando o determinante é diferente de zero, a única solução de (C.11) é $A = B = 0$ e as equações de movimento (C.9) e (C.10) reduzem-se a

$$F(G^{\mu\nu} - kT^{\mu\nu}) = 0, \quad \partial_\rho [\sqrt{-g}\partial_\sigma\Psi H(G^{\rho\sigma} - kT^{\rho\sigma})] = 0, \quad (\text{C.13})$$

onde $F \neq 0$. Portanto, a primeira equação é equivalente às equações de Einstein-Hilbert (C.4) com respeito a métrica “disforme” $g_{\mu\nu}$ ou com respeito aos seus elementos $l_{\mu\nu}$ e Ψ são equivalentes e reproduzem as equações de Einstein da RG $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ para a métrica $g_{\mu\nu}$. Dessa forma, a teoria nada mais é do que uma generalização da métrica disforme $g_{\mu\nu}$ reduzida a uma métrica conforme $g_{\mu\nu} = F(\Psi)l_{\mu\nu}$, como em [54].

C.4 Gravitação mimética

Vamos agora estudar o caso quando o determinante (C.12) é zero. Como $F \neq 0$ isto implica que a função $H(w, \Psi)$ deve ser da forma

$$H(w, \Psi) = -\frac{F(w, \Psi)}{w} + h(\Psi). \quad (\text{C.14})$$

(Observe que a “gravitação mimética” para a qual $F(w, \Psi)$ e $h(\Psi) = 1$ enquadra-se nessa categoria.) A solução do sistema (C.11) é $B = w A$ e as equações de movimento (C.9) e (C.10) resultam em

$$G^{\mu\nu} - kT^{\mu\nu} = \frac{A}{w} (l^{\mu\rho} \partial_\rho \Psi) (l^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Psi), \quad \frac{2}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} h A l^{\rho\sigma} \partial_\sigma \Psi) = A w \frac{dh}{d\Psi}. \quad (\text{C.15})$$

Lembrando que $A \equiv (G^{\rho\sigma} - kT^{\rho\sigma}) l_{\rho\sigma}$.

Assumindo que $h(\Psi) \neq 0$, essas equações de movimento podem ser escritas em termos da métrica disforme $g_{\mu\nu}$. De fato de (C.5) e (C.14) nós temos

$$g_{\mu\nu} = F(\Psi, w) l_{\mu\nu} + \partial_{m^a} \Psi \partial_\nu \Psi \left(h(\Psi) - \frac{F(\Psi, w)}{w} \right), \quad (\text{C.16})$$

que é invertível se $h \neq 0$, com

$$g^{\mu\nu} = \frac{l^{\mu\nu}}{F} + \frac{F - w h}{F h w^2} (l^{\mu\rho} \partial_\rho \Psi) (l^{\nu\sigma} \partial_\sigma \Psi). \quad (\text{C.17})$$

Portanto, nós temos que $A = (G - kT)/(hw)$ e $l^{\mu\rho} \partial_\rho \Psi = h w \partial^\mu \Psi$, onde $G - kT \equiv g_{\rho\sigma} (G^{\rho\sigma} - kT^{\rho\sigma})$ e $\partial^\mu \Psi \equiv g^{\mu\rho} \partial_\rho \Psi$. Em consequência, as equações de movimento (C.15) podem ser escritas como

$$G_{\mu\nu} - kT_{\mu\nu} = (G - kT) h \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi, \quad 2D_\rho [(G - kT) h \partial^\rho \Psi] = (G - kT) \frac{1}{h} \frac{dh}{d\Psi}, \quad (\text{C.18})$$

a partir dessas podemos concluir que a norma de $\partial_\mu \Psi$ está limitada a ser $g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = 1/h$. E, finalmente, a função $h(\Psi)$ pode ser eliminada através de uma redefinição de campos. De fato, introduzindo Ψ tal que $d\Phi/d\Psi = \sqrt{|h|}$ nós obtemos

$$G_{\mu\nu} - kT_{\mu\nu} = \epsilon (G - kT) \partial_\mu \Psi \partial_\nu \Psi, \quad 2D_\rho [(G - kT) \partial^\rho \Psi] = 0, \quad (\text{C.19})$$

dependendo do sinal da normal de $\partial_\mu \Psi$.

Para $\epsilon = -1$, isto é, para um vetor tipo-tempo $\partial_\mu \Psi$, essas equações são exatamente as mesmas que as equ. de movimento originais da gravitação mimética derivadas em [47] no caso particular $h(\Psi) = 1$ e $F(\Psi, w) = w$.

Em resumo, nós mostramos que elas também podem ser obtidas pela variação da ação de Einstein-Hilbert (C.4) com respeito aos campos $l_{\mu\nu}$ e Ψ , os quais definem uma métrica disforme mais geral $g_{\mu\nu}$ dada por (C.16). Além disso, vimos na seção anterior que se a métrica disforme não é do tipo acima, então as equações de movimento são simplesmente as equações de Einstein, $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$.

C.5 Soluções estáticas esfericamente simétricas no vácuo

Conforme mostrado em [47], as equações (C.19) não possuem soluções de vácuo estáticas esfericamente simétricas se o vetor $\partial_\mu \Psi$ é do tipo-tempo.

Nesta seção obteremos a solução de vácuo estática esfericamente simétrica para o setor espacial do vetor $\partial_\mu \Psi$.

As coordenadas de Schwarzschild-Droste $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ são escolhidas de tal forma que o campo Ψ e o elemento de linha $ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ são claramente estáticos e esfericamente simétricos:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \text{ e } \Psi = \Psi(r). \quad (\text{C.20})$$

Primeiramente note que a métrica de Schwarzschild, para a qual $G_{\mu\nu} = 0$, é solução para as equações (C.19) para todas as funções $\Psi(r)$.

Quando o escalar de curvatura $R = -G$ não é nulo, o traço da primeira equação (C.19) impõe a escolha $\epsilon = +1$ e $\partial^\mu \Psi \partial_\mu \Psi = 1$, ou seja: $d\Phi/dr = e^{\lambda/2}$ (portanto Ψ é a coordenada gaussiana normal e radial). A segunda equação dá: $R = C_0 e^{-\nu/2}/r^2$. Relembrando que

$$G_{tt} = \frac{e^\nu}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-\lambda} \right) \right] \text{ e } G_{rr} = \frac{e^\lambda}{r^2} \left(1 - e^{-\lambda} \right) + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \quad (\text{C.21})$$

as equações $G_{tt} = 0$ e $G_{rr} = -R(d\Phi/dr)^2$ resultam em

$$e^{-\lambda} = 1 - 2m/r, \quad e^{\nu/2} = C_1 \sqrt{1 - 2m/r} + C_0 \left[1 - \sqrt{1 - 2m/r} \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r - 2m}) \right] \quad (\text{C.22})$$

e ainda podemos checar que a outra equação, $G_{\theta\theta} = 0$, é de fato satisfeita graças à identidade de Bianchi. A constante C_1 pode ser absorvida ao redefinir a coordenada temporal t e, por consequência, pode ser fixada com valor igual a 1. A solução, portanto depende de duas constantes, m e C_0 . Quando $C_0 = 0$ ela reduz-se a solução trivial de Schwarzschild.

Para $C_0 \neq 0$ a métrica não é assintoticamente plana e difere fortemente da métrica bem testada de Schwarzschild.

Esta é uma indicação clara que a gravitação mimética pode prover uma explicação para a presença de matéria escura no universo no setor onde $\partial_\mu \Phi$ é tipo-tempo, mas é incompatível com os testes no sistema solar no setor onde o vetor $\partial_\mu \Phi$ é tipo-espaço.

Bibliografia

- [1] Kip Thorne. *Warping spacetime*. Cambridge University Press, 2003. The future of theoretical physics and cosmology: celebrating Stephen Hawking's 60th birthday.
- [2] E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, March 1929. doi: 10.1073/pnas.15.3.168.
- [3] E. Margaret Burbidge, G. R. Burbidge, William A. Fowler, and F. Hoyle. Synthesis of the elements in stars. *Rev. Mod. Phys.*, 29:547–650, Oct 1957. doi: 10.1103/RevModPhys.29.547.
- [4] G. R. Burbidge, editor. 1959. Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford University Press.
- [5] V. L. Ginsburg, editor. 1959. Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford University Press.
- [6] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. , 142:419–421, July 1965. doi: 10.1086/148307.
- [7] Susan Jocelyn Bell. *The Measurement of radio source diameters using a diffraction method*. PhD thesis, University of Cambridge, 1968.
- [8] C. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, Nov 1961. doi: 10.1103/PhysRev.124.925.
- [9] Nathan Rosen. Oscillating universe and scalar field. *International Journal of Theoretical Physics*, 2(2):189–198, 1969. ISSN 0020-7748. doi: 10.1007/BF00669565.
- [10] Gary Gibbons and Clifford M. Will. On the Multiple Deaths of Whitehead's Theory of Gravity. *Stud.Hist.Philos.Mod.Phys.*, 39:41–61, 2008. doi: 10.1016/j.shpsb.2007.04.004.
- [11] Domenico Giulini. What is (not) wrong with scalar gravity? 2006. doi: 10.1016/j.shpsb.2007.09.001.

- [12] Clifford M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Relativity*, (3), 2006.
- [13] Novello M., Bittencourt E., Moschella U., Salim J. M., Goulart E., and Toniato J. D. Geometrical scalar theory of gravity. *Classical Quantum Gravity*, 12:2065–2079, 2013. doi: 10.1063/1.870452.
- [14] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. $f(r)$ theories. *Living Rev. Relativity*, (3), 2010.
- [15] Yasunori Fujii and Kai Ichi Maeda. *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [16] M. Zumalacárregui, T. S. Koivisto, and D. F. Mota. DBI Galileons in the Einstein frame: Local gravity and cosmology. *Phys.Rev.*, 87(8):083010, April 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.87.083010.
- [17] Miguel Zumalacárregui and Juan García-Bellido. Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian. *Phys.Rev.*, D89(6):064046, 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.89.064046.
- [18] Jacob D. Bekenstein. Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm. *Phys.Rev.*, D70:083509, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.083509,10.1103/PhysRevD.70.083509,10.1103/PhysRevD.71.069901,10.1103/PhysRevD.71.069901.
- [19] M. Chaichian, J. Klusoň, M. Oksanen, and A. Tureanu. Mimetic dark matter, ghost instability and a mimetic tensor-vector-scalar gravity. *Journal of High Energy Physics*, 12:102, December 2014. doi: 10.1007/JHEP12(2014)102.
- [20] Nicolás Yunes and Xavier Siemens. Gravitational-Wave Tests of General Relativity with Ground-Based Detectors and Pulsar-Timing Arrays. *Living Rev. Relativity*, 9(16), 2013. doi: 10.12942/lrr-2013-9.
- [21] Jacob D. Bekenstein. Gravitational theories. *Astronomy and Astrophysics Encyclopedia*, 3 1999. ed. Stephen P. Maran.
- [22] P. G. Roll, R. Krotkov, and R. H. Dicke. The equivalence of inertial and passive gravitational mass. *Annals of Physics*, 26:442–517, February 1964. doi: 10.1016/0003-4916(64)90259-3.
- [23] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 4(425):374–376, 9 2003. doi: 10.1038/nature01997.

-
- [24] Douglas Clowe, Marusa Bradac, Anthony H. Gonzalez, Maxim Markevitch, Scott W. Randall, et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *Astrophys.J.*, 648:L109–L113, 2006. doi: 10.1086/508162.
- [25] E. Bittencourt, U. Moschella, M. Novello, and J.D. Toniato. Cosmology in geometric scalar gravity. *Phys.Rev.*, D90(12):123540, 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.90.123540.
- [26] G. Weinstein. From the Berlin “ENTWURF” Field Equations to the Einstein Tensor I: October 1914 until Beginning of November 1915. *ArXiv e-prints*, January 2012.
- [27] G. Nordstrom. *Phys. Zeit.*, 13:1126, 1912.
- [28] M Novello and E Goulart. Beyond analog gravity: the case of exceptional dynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 28(14):145022, 2011.
- [29] Mario Novello et al. Teoria estendida do modelo geométrico-escalar da gravitação. (não publicado).
- [30] Júnior Diniz Toniato. *A teoria geométrica-escalar da gravitação e sua aplicação à cosmologia*. PhD thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), 11 2014.
- [31] E. Goulart, M. Novello, F.T. Falciano, and J.D. Toniato. Hidden geometries in nonlinear theories: A Novel aspect of analogue gravity. *Class.Quant.Grav.*, 28:245008, 2011. doi: 10.1088/0264-9381/28/24/245008.
- [32] Einstein A. *The meaning of relativity*. Princeton University Press, 1950.
- [33] Novello M., De Lorenci V. A., J. M.m Salim, and Klippert R. Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, 61(4), 2000.
- [34] M. Novello and E. Bittencourt. The gravitational energy. 2013.
- [35] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley Sons, Inc., NewYork, 1972.
- [36] R. Tolman. Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, 55(4):364–373, 1939.
- [37] Oppenheimer J.R. and Volkoff G.M. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55(4):374–381, 1939.
- [38] S. Chandrasekhar. The highly collapsed configurations of a stellar mass (Second paper). , 95:207–225, January 1935.
- [39] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein’s theory. *ArXiv Physics e-prints*, 1999.

- [40] H. A. Buchdahl. General relativistic fluid spheres. *Phys. Rev.*, 116:1027–1034, Nov 1959.
- [41] Sir Hermann Bondi. The gravitational redshift from static spherical bodies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 302(2). ISSN 1365-2966.
- [42] G. M. Volkoff. On the equilibrium of massive spheres. *Phys. Rev.*, 55:413–413, 1939.
- [43] Mario Novello, Nelson Pinto-Neto, and Santiago Esteban Perez Bergliaffa. *Programa Mínimo de Cosmologia*. Jauá editora, Rio de Janeiro, 2010. ISBN 978-85-89410-03-8.
- [44] N. Voje Johansen and F. Ravndal. On the discovery of Birkhoff’s theorem. *ArXiv Physics e-prints*, 2005.
- [45] A. H. Chamseddine and V. Mukhanov. Mimetic dark matter. *Journal of High Energy Physics*, 11:135, November 2013. doi: 10.1007/JHEP11(2013)135.
- [46] E. A. Lim, I. Sawicki, and A. Vikman. Dust of dark energy. , 5:012, May 2010. doi: 10.1088/1475-7516/2010/05/012.
- [47] A. H. Chamseddine, V. Mukhanov, and A. Vikman. Cosmology with Mimetic Matter. , 6:017, June 2014. doi: 10.1088/1475-7516/2014/06/017.
- [48] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Mimetic $F(R)$ gravity: Inflation, dark energy and bounce. *Modern Physics Letters A*, 29:50211, December 2014.
- [49] G. Leon and E. N. Saridakis. Dynamical behavior in mimetic $F(R)$ gravity. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [50] D. Momeni, R. Myrzakulov, and E. Güdekli. Cosmological viable Mimetic $f(R)$ and $f(R,T)$ theories via Noether symmetry. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [51] N. Deruelle and J. Rua. Disformal transformations, veiled General Relativity and Mimetic Gravity. , 9:002, September 2014. doi: 10.1088/1475-7516/2014/09/002.
- [52] V. Faraoni and E. Gunzig. Einstein frame or Jordan frame ? *ArXiv Astrophysics e-prints*, October 1999.
- [53] M. Postma and M. Volponi. Equivalence of the Einstein and Jordan frames. , 90(10): 103516, November 2014. doi: 10.1103/PhysRevD.90.103516.
- [54] Nathalie Deruelle and Misao Sasaki. Conformal equivalence in classical gravity: the example of ‘Veiled’ General Relativity. *Springer Proc.Phys.*, 137:247–260, 2011. doi: 10.1007/978-3-642-19760-4_23.
- [55] Jacob D. Bekenstein. The Relation between physical and gravitational geometry. *Phys.Rev.*, D48:3641–3647, 1993. doi: 10.1103/PhysRevD.48.3641.

-
- [56] F.T. Falciano and E. Goulart. A new symmetry of the relativistic wave equation. *Class.Quant.Grav.*, 29:085011, 2012. doi: 10.1088/0264-9381/29/8/085011.
- [57] E. Goulart and F.T. Falciano. Disformal invariance of Maxwell's field equations. *Class.Quant.Grav.*, 30:155020, 2013. doi: 10.1088/0264-9381/30/15/155020.
- [58] Dario Bettoni and Stefano Liberati. Disformal invariance of second order scalar-tensor theories: Framing the Horndeski action. *Phys.Rev.*, D88(8):084020, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.88.084020.
- [59] A.O. Barvinsky. Dark matter as a ghost free conformal extension of Einstein theory. *JCAP*, 1401(01):014, 2014. doi: 10.1088/1475-7516/2014/01/014.
- [60] Alexey Golovnev. On the recently proposed Mimetic Dark Matter. *Phys.Lett.*, B728: 39–40, 2014. doi: 10.1016/j.physletb.2013.11.026.
- [61] O. Malaeb. Hamiltonian formulation of mimetic gravity. , 91(10):103526, May 2015. doi: 10.1103/PhysRevD.91.103526.